

1. Нека је на простору \mathbb{R}^2 дефинисана функција $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |\arctg x_1 - \arctg x_2| + |\alpha \cdot \arctg y_1 - \arctg y_2|,$$

где је $\alpha \geq 0$.

а) [3] Наћи константу α , за коју је d метрика на \mathbb{R}^2 .

б) [8] Дати су скупови

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{3}\} \text{ и } B = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y < -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Одредити дијаметар скупа A , растојање $d(A, B)$ и испитати отвореност и затвореност скупа B .

в) [4] Описати све ограничене скупове $A \subseteq \mathbb{R}^2$ у метрици d .

2. Дефинишимо функцију $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \cos \frac{x^2}{y}\right) \sqrt{x^2 + y^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}.$$

а) [6] Испитати непрекидност функције f у тачкама $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

б) [3] Израчунати извод у правцу произвољног јединичног вектора (a, b) у тачки $(0, 0)$.

в) [6] Испитати диференцијабилност функције f у тачки $(0, 0)$.

3. [15] Нека је S површ дата формулом

$$(2 + x - y)^2 + (z - x)^2 + (z + y)^2 = 1.$$

Одредити тачку на површи S , за коју је растојање од z -осе најмање.

4. [15] Израчунати запремину тела T датог са

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 18, 2x^2 + 2y^2 - z^2 \leq 4, 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq 12\}.$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.