

1. Нека су дати скупови

$$A = \left\{ \sin \left( \frac{5n-10}{4n+1} \pi \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{и} \quad B = \left\{ \frac{n^3(m+1)^m}{8(m^3+2n^3)(-m)^m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

- [6] Наћи  $\sup A$ ,  $\inf A$ ,  $\min A$  и  $\max A$  (ако постоје).
- [6] Наћи  $\sup B$ ,  $\inf B$ ,  $\min B$  и  $\max B$  (ако постоје).
- [3] Наћи  $\sup(A \cup B)$ ,  $\inf(A \cup B)$ ,  $\min(A \cup B)$  и  $\max(A \cup B)$  (ако постоје).

2. Нека је  $0 < \varepsilon < 1$  и  $a \in \mathbb{R}$ . Низ  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  је дефинисан на следећи начин:

$$x_1 = a, x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n, n \geq 1.$$

- [8] Доказати да је низ  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  конвергентан.
- [4] Ако са  $\xi$  означимо граничну вредност  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , доказати да је  $\xi$  јединствено решење једначине  $x - \varepsilon \sin x = a$ .

3. Нека су дате функције  $f, g: [-\frac{\pi}{2}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ (\sqrt{4+x} - 2e^{\frac{x}{8}})(\sin x)^{-2} + a, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \ln(1 + |x - x^2|), & x \geq 0 \\ b, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}.$$

- [4] Наћи константе  $a$  и  $b$  такве да функције  $f$  и  $g$  буду непрекидне на  $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ .
  - [6] За такве вредности  $a$  и  $b$  испитати диференцијабилност функције  $f(x)g(x)$  на  $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ .
  - [5] За такве вредности  $a$  и  $b$  испитати равномерну непрекидност функције  $f(x)g(x)$  на  $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ .
4. [8] Нека је  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидно диференцијабилна функција таква да је  $f'(x) > 0$  за све  $x \in (a, b)$ . Ако је  $a \leq c < d \leq b$  и  $f(c)f(d) > 0$  показати да постоји  $\xi \in (c, d)$  такво да је

$$\frac{df(c) - cf(d)}{f(d) - f(c)} = \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} - \xi.$$

**Напомена:** У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.