Математички факултет, Универзитет у Београду
Први колоквијум из Анализе 1, токови 102 и 103
8.2.2021.

1. Нека су дати скупови

$$A = \left\{ \sin\left(\frac{5n-10}{4n+1}\pi\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{и} \quad B = \left\{ \frac{n^3(m+1)^m}{8(m^3+2n^3)(-m)^m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

   а) [6] Наћи $\sup A, \inf A, \min A$ и $\max A$ (ако постоје).

   б) [6] Наћи $\sup B, \inf B, \min B$ и $\max B$ (ако постоје).

   в) [3] Наћи $\sup(A \cup B), \inf(A \cup B), \min(A \cup B)$ и $\max(A \cup B)$ (ако постоје).

2. Нека је $0 < \varepsilon < 1$ и $a \in \mathbb{R}$. Низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ је дефинисан на следећи начин:

$$x_1 = a, x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n, n \geqslant 1.$$

   а) [8] Доказати да је низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан.

   б) [4] Ако са ξ означимо граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, доказати да је ξ јединствено решење једначине $x - \varepsilon \sin x = a$.

3. Нека су дате функције $f, g\colon \left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}, & x \geqslant 0 \\ (\sqrt{4+x} - 2e^{\frac{x}{8}})(\sin x)^{-2} + a, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \ln(1 + |x - x^2|), & x \geqslant 0 \\ b, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \end{cases}.$$

   а) [4] Наћи константе a и b такве да функције f и g буду непрекидне на $\left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$.

   б) [6] За такве вредности a и b испитати диференцијабилност функције $f(x)g(x)$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$.

   в) [5] За такве вредности a и b испитати равномерну непрекидност функције $f(x)g(x)$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$.

4. [8] Нека је $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилна функција таква да је $f'(x) > 0$ за све $x \in (a,b)$. Ако је $a \leqslant c < d \leqslant b$ и $f(c)f(d) > 0$ показати да постоји $\xi \in (c,d)$такво да је

$$\frac{df(c) - cf(d)}{f(d) - f(c)} = \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} - \xi.$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.