Математички факултет, Универзитет у Београду
Испитни рок Септембар 2 из Анализе 1, токови 102 и 103
23.9.2021.

1. а) [3] Доказати да је $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$, када $x \to 0$.

Нека је функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin x} - \ln(1-x) + \sqrt{1-4x} - 2\cos x + a}{x^2}, & x \in (-\infty, 0), \\ \sqrt[3]{x^2 - x} + b, & x \in [0, 1], \\ |(x-1)(x-2)(x-3)| \sin \frac{\pi}{x-1}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

б) [12] Одредити све реалне константе a и b за које је функција g непрекидна.

в) [10] За тако добијене константе a и b одредити све $x \in \mathbb{R}$ за које је функција g диференцијабилна.

У другом и трећем задатку користићемо исту ознаку за функцију $f(x) = \sqrt{\frac{\ln x - 1}{\ln x - 2}} - 2x$.

2. а) [20] Испитати ток и скицирати график функције (није потребно експлицитно одредити нуле функције, већ само њихов број).

б) [4] Наћи једначину тангенте на функцију $f(x)$ у тачки $(e^3, f(e^3))$.

в) [4] У зависности од реалног параметра α, наћи број решења једначине $f(x) = \alpha$.

г) [4] Наћи $f(f((0, e]) \cap D_f)$, где је са D_f означен домен функције f.

3. а) [15] Израчунати $\displaystyle\int \frac{f(x)}{x}\, dx$.

б) [5] Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} f(x)\, dx$.

в) [3] Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_{e^3}^{+\infty} (f(x) + 2x)\, dx$.

г) [5] Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \cos(x^2)(f(x) + 2x)\, dx$.

4. [15] Испитати за које $x \in \mathbb{R}$ следећи ред конвергира:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\pi)^n + e^{n+1}}{2n-1} (x-2)^n.$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.