

1. Нека је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x+1} \right), & x < -1, \\ b, & x = -1, \\ \frac{\ln(x+2)}{x+1} + c, & x > -1. \end{cases}$$

- (а) [10] Одредити све реалне константе a , b и c за које је функција f непрекидна.
(б) [10] Да ли постоје реалне константе a , b и c за које је функција f диференцијабилна?

2. Нека је дата функција $f(x) = x^2 - 6x \operatorname{arctg} x + 3 \ln(1 + x^2)$.

- а) [5] Испитати конвексност функције $f(x)$.
б) [5] Наћи број нула функције $f(x)$.
в) [5] Скицирати график функције $f(x)$.
г) [5] Наћи асимптоте функције $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
д) [5] Наћи $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x^2}{x^4}$.
ђ) [5] Наћи директну слику $f((-2, 3))$.

3. Нека је дат низ интеграла $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ са

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^{2021} (2021 - x)^n e^x dx.$$

- а) [8] Израчунати I_1 и I_2 .
б) [5] Наћи везу између I_n и I_{n+1} .
в) [5] Доказати да низ I_n конвергира.
г) [7] Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.
д) [5] Доказати да ред $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2021^n}{n!}$ конвергира и наћи његову суму.

4. Нека је дат низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где је $a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(1+(n+1)^2)}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $a_1 > 0$.

- а) [10] Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 a_n$.
б) [10] Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{3n} a_n}{e^{3n}}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.