

1. Нека је дат низ $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ дефинисан са $b_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$ и нека је за свако $n \in \mathbb{N}$ дат скуп A_n

$$A_n = \left\{ \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{\frac{m}{8+3n}} \mid m \in \mathbb{N}, m \geq n \right\} \cup \left\{ \left(1 + \frac{1}{m^2 + 2m}\right)^{\frac{(m+1)^2 n^2}{(4n+1)^2}} \mid m \in \mathbb{N}, m \geq n \right\}.$$

а) [5] Доказати да је низ $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ опадајући.

б) [13] Наћи $a_n = \sup A_n$.

в) [7] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2. а) [15] Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = x \frac{\ln|x| - 1}{\ln|x| + 1}$.

б) [5] У зависности од реалног параметра α наћи број решења једначине $f(x) = \alpha$.

в) [5] Наћи директну слику $f\left(\left(0, e^{-\frac{2022}{2021}}\right) \cup (1, e^4)\right)$.

3. [25] Израчунати $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt[4]{(4-x^4)^3}} dx$.

4. Дата је функција $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

а) [8] Одредити домен и слику функције f . Показати да функција f има инверзну функцију $g = f^{-1}$ и потом је одредити.

б) [12] Развити функцију $g(x)$ у степени ред у околини тачке $x = 0$ и одредити скуп на којем важи тај развој.

в) [5] Израчунати суму $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(2n+1)}$.

Напомена: Сваки задатак вреди 25 поена. Време за израду задатака је 180 минута.