

1. а) [5] Нађи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (ако постоји) где је

$$a_n = \frac{\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n}}{\ln n} \quad (n \geq 2).$$

- 6) [5] Нађи $T = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^{(-1)^{n+1}}}$.

- в) [3] Нађи $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (ако постоји), при чему важи

$$a_n \cdot b_n - \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^2} = T \quad (n \geq 2).$$

2. Нека је функција $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ дата са:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + x} \cdot |x + 1| + a, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{\cos(3x) + e^{x^2} - 2}{\ln(1+5x) \cdot \sin(2x)}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

- a) [6] Нађи константу $a \in \mathbb{R}$ тако да је функција f непрекидна на $(-\infty, 1]$.
 б) [2] Да ли постоји $f'_-(0)$?
 в) [4] За a добијено у делу а) нађи све тачке домена у којима је f диференцијабилна.
 3. а) [4] Нека су α и β ненегативни реални бројеви и нека су скупови $A, B \subseteq \mathbb{R}$ непразни и одозго ограничени. Доказати да је

$$\sup\{\alpha a + \beta b \mid a \in A, b \in B\} = \alpha \sup A + \beta \sup B.$$

- б) [2] Да ли тврђење под а) важи без претпоставке о ненегативности α и β ?
 в) [3] Испитати монотоност низа $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ задатог са $a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n}$.
 г) [4] Нађи $\sup S$ где је

$$S = \left\{ \pi \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{n^2+1}{2n^2+n} + e \cdot |-x^2 + 3x - 2| \mid n \in \mathbb{N}, x \in [0, 3] \right\}.$$

Да ли постоји $\max S$?

4. а) [6] Доказати да је $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ за све $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
 б) [6] Одредити број решења једначине $\cos x + \ln(\cos x) + x^2 = -2023$ на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.