Математички факултет, Универзитет у Београду
Испитни рок јун 2 из Анализе 1, токови 102 и 103
30.6.2021.

1. [25] Израчунати интеграл
$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}\arccos x}{2-x^2}\,dx.$$

2. У зависности од $\alpha \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, ако је:

   а) [10] $a_n = (n+1)^\alpha - \left(n+\frac{1}{n}\right)^\alpha$;

   б) [15] $a_n = (\log n)^\alpha \left((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - n^{1+\frac{1}{n+1}} - 1\right)$.

3. Нека је дата једначина $x2^x = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

   а) [7] Доказати да једначина има јединствено решење за фиксирано $n \in \mathbb{N}$. Означимо решење са a_n. Формирајмо низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ чији су чланови решења једначина за $n \in \mathbb{N}$ (a_1 је решење једначине $x2^x = 1^2$, a_2 је решење једначине $x2^x = 2^2$,...).

   б) [7] Доказати да је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотон.

   в) [7] Испитати конвергенцију низа $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

   г) [7] Израчунати граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$.

   д) [7] Израчунати граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \ln^2 n \left(a_n \ln(a_n+1) - a_n \ln a_n - 1 + \dfrac{1}{2a_n}\right)$.

4. [15] Нека су $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ функције које су непрекидне на $[a,b]$ и диференцијабилне на (a,b). Претпоставимо да су f' и g' непрекидне, позитивне и растуће функције на (a,b). Доказати да постоји $c \in (a,b)$ тако да је
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = f'(c)g'(c).$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.