

1. Нека је дата функција $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ са $f(x) = \sqrt[3]{x^5} \sin \frac{\pi}{x} + |x^2 + 2x|$.

а) [4] Одредити $c \in \mathbb{R}$ тако да је функција $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дата са

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq 0 \\ c & , x = 0 \end{cases}$$

непрекидна.

б) [11] Испитати диференцијабилност функције g .

2. а) [14] Доказати да је

$$2 \sin x - 3x + \operatorname{tg} x > 0$$

за све $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

б) [4] Нека је дата функција $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x - x}.$$

Доказати да је $f(x) > 2$ за све $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

в) [9] Наћи $f((0, \frac{\pi}{2}))$.

3. Нека је дат низ интеграла

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x| \sin nx}{(1 + 2^x) \sin x} dx, \quad n \geq 1.$$

а) [9] Доказати да је $I_n = \int_0^{\pi} \frac{x \sin nx}{\sin x} dx$.

б) [3] Наћи I_1 и I_2 .

в) [9] Наћи везу између I_n и I_{n-2} .

г) [6] Да ли низ $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира? Одредити број тачака нагомилавања низа $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

ђ) [6] Доказати да постоји реалан број A такав да ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |A - I_n| \sin \frac{(n+1)\pi}{2}$$

конвергира.

4. [25] Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{3} \left(\sqrt{\frac{(1+n)^3}{n}} + an + b \right)$$

у зависности од реалних параметара a и b .

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.