

1. а) [5] Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (ако постоји) где је

$$a_n = \frac{1 \cdot \cos 1 + 2 \cdot \cos \frac{1}{2} + \cdots + n \cdot \cos \frac{1}{n}}{n^2}.$$

- б) [5] Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (ако постоји) где је

$$b_n = \sqrt[n]{\log(n^{2023}) + n^9 + 6^n}.$$

- в) [5] Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ (ако постоји) где је

$$c_n = \left(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1-n}{2n-1} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{n+3}}}.$$

2. Нека је функција $f : (-\infty, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ дата са:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + x} \cdot |x+1| + a, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{e^{2x}-1}{(1+x)^5 \cdot \operatorname{tg}(3x) - \log(1+2x)}, & x \in (0, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

- а) [6] Наћи константу $a \in \mathbb{R}$ тако да је функција f непрекидна на $(-\infty, \frac{1}{2}]$.
б) [2] Да ли постоји $f'_-(0)$?
в) [4] За a добијено у делу а) наћи све тачке домена у којима је f диференцијабилна.

3. а) [5] Наћи супремум и инфимум скупа

$$A = \left\{ \frac{3n^2 - 3n + 1}{3n^2 - 5n + 2} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}.$$

- б) [2] Ако су f и g монотоне функције, доказати да је и њихова композиција $f \circ g$ монотона.
в) [3] Нека је скуп $X \subseteq \mathbb{R}$ такав да постоји коначан $\sup X$ и нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна опадајућа функција. Доказати да је $\inf\{f(x) \mid x \in X\} = f(\sup X)$.
д) [5] Наћи инфимум скупа

$$B = \left\{ \operatorname{arctg} \left(e^{-\frac{3n^2-3n+1}{3n^2-5n+2}} \right) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}.$$

4. [8] Нека је $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Доказати да постоји $c \in (1, 3)$ такво да важи

$$f(c) = \frac{c-2}{(c-1)(c-3)}.$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.