Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 1 (ток 104) - други колоквијум
30.5.2023.

1. а) [12] Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{|x-5|} e^{\frac{1}{x+2}}.$$

   б) [2] У зависности од реалног параметра α наћи број решења једначине $f(x) = \alpha$.

2. а) [2] Доказати да је функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$g(x) = \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x + \sin^4 x}$$

   $\frac{\pi}{2}$-периодична.

   б) [12] Израчунати интеграл

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x + \sin^4 x}\, dx.$$

3. а) [2] Наћи реалне константе c_1 и c_2 такве да је $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} + \ln \frac{2n+5}{2n+3} = c_1 + \frac{c_2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   б) [7] Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, где је $a_n = (-1)^n \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} + \ln \frac{2n+5}{2n+3}\right)$.

   в) [5] Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, где је $b_n = \operatorname{arctg}\left(\sin\left(\frac{n+23}{2n+2023}\right)\right)$.

4. [8] Ако је $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $\int\limits_0^1 f(x)\, dx = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2023}$. Доказати да постоји $x_0 \in (0,1)$ тако да је $f(x_0) = \frac{1-x_0^{2023}}{1-x_0}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.