

1. а) [12] Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.
б) [3] Наћи (ако постоје) $\sup_{x \in (\frac{9}{4}, 3)} f(x)$, $\inf_{x \in (\frac{9}{4}, 3)} f(x)$, $\max_{x \in (\frac{9}{4}, 3)} f(x)$, $\min_{x \in (\frac{9}{4}, 3)} f(x)$.

2. Испитати конвергенцију следећих редова:

- а) [10] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n(n+1)} - 2n - 1}{(n + \frac{1}{n})^{\alpha} \cos \frac{1}{n}}$, у зависности од реалног параметра α .
б) [5] $\sum_{n=1}^{\infty} (e - (1 + \frac{1}{n})^n) \sin n$.

3. Нека је дат низ $\{I_n\}_{n \geq 0}$ са

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

- а) [2] Доказати да је $I_0 = \frac{\pi}{2}$ и $I_1 = 1$.
б) [4] Доказати да је $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ за све $n \geq 2$.
в) [2] Доказати да је $I_{2n} \cdot I_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2}$ за све $n \geq 0$.
г) [4] Доказати да је низ $\{I_n\}_{n \geq 0}$ конвергентан и наћи му граничну вредност.
д) [3] Доказати да је $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \cdot I_{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
ђ) [2] Доказати неједнакост

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

- е) [3] Доказати да је $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, а затим помоћу тврђења под ђ) (или на неки други начин) доказати неједнакост

$$\sqrt{n} \cdot I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \cdot I_{2n-2}.$$

На крају, израчунати вредност интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

4. Нека је $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција таква да је $f(1) = 0$.

- а) [7] Доказати да једначина $2f(x) = f'(x) \sin 2x$ има бар једно решење на $[1, 2]$.
б) [3] Наћи пример функције f која задовољава услове задатка и за коју претходна једначина има тачно једно решење.

5. [10] Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $\int_a^b f(x) dx = 0$. Доказати да постоји $c \in (a, b)$ тако да важи

$$cf(c) \cdot \int_a^c f(t) dt = cf(c) + \int_a^c f(t) dt.$$

Напомена: Студенти раде прва три задатка, као и један од задатака 4 или 5 по избору.
У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена.