Математички факултет, Универзитет у Београду
Писмени испит из Анализе 1
30.8.2019.

1. а) [12] Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2 - 2|x| + 1)$.

   б) [3] У зависности од реалног параметра α, одредити број решења једначине $f(x) = \alpha$.

2. [12] Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma} \cos \frac{2n}{1+n^2}$$

у зависности од реалног параметра γ.

3. а) [9] У зависности од реалних параметара p и q, испитати конвергенцију интеграла

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^q x}{(x^4 - p)\sqrt{x^2+3}}\, dx.$$

   б) [9] У случају да је $p = q = 0$, израчунати вредност интеграла I.

4. Нека је дата функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ класе $C^{2020}(\mathbb{R})$ таква да је

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(2019)}(0) = 0,\ f^{(2020)}(0) < 0.$$

   а) [3] Доказати да постоји реалан број $\delta > 0$ такав да је $0 < f(x) < x,\ \forall x \in (0, \delta)$.

   б) [12] Нека је δ дефинисан као у делу под а). Дефинишимо низ реалних бројева $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ са $a_1 = \frac{\delta}{2}$, $a_{n+1} = f(a_n)$ за $n \geqslant 1$. У зависности од реалног параметра r, испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^r$.

5. [15] Нека је функција f непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b), таква да је $f(a) = a$ и $f(b) = b$. Доказати да постоје реални бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$ такви да је $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2019} < b$ и важи

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{1}{f'(x_{2019})} = 2019.$$

   Да ли тврђење остаје на снази ако је на десној страни претходне једнакости 2020 уместо 2019?

Напомена: Студенти раде прва три задатка, као и један од задатака 4 или 5 по избору.
У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена.