Математички факултет, Универзитет у Београду
Први колоквијум из Анализе 1
4.2.2019.

1. Дата је функција $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$.

   а) [1] Наћи реалне бројеве $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ тако да важи $f(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x} + \frac{d_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ кад $x \to \infty$ и $f(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x} + \frac{d_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ кад $x \to -\infty$.

   б) [5,5] Испитати ток и скицирати график функције $f(x)$.

   в) [1] У зависности од реалног параметра α, наћи број решења једначине $f(x) = \alpha$.

2. [7,5] Дат је скуп $S = \left\{ \frac{nm^2+2nm-n-4m^2-8m+4}{nm^2+2nm} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \left\{ \frac{10n^2}{m^2+m+7n^2} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}$. Наћи, ако постоје, $\sup S$, $\inf S$, $\max S$ и $\min S$.

3. а) [1,5] Доказати да једначина $e^x + nx = 2019$ има јединствено решење за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$.

   б) [4] За фиксиран природан број n, означимо са a_n решење једначине из (а), а затим формирајмо низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Доказати да је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан.

   в) [2] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n(n(2018 - na_n) - 2018)$.

4. а) [1,5] Доказати да је функција $f(x) = x^p$, где је $0 \leqslant p \leqslant 1$, равномерно непрекидна на $(0, \infty)$.

   б) [6] Испитати равномерну непрекидност функције $g(x) = x^{\frac{1}{3}}(\ln(1 + |x|) + 1)$ на $\mathbb{R}$.

5. [7,5] Нека је f непрекидно диференцијабилна функција на $[a, b]$ и нека постоји $c \in (a, b)$ тако да је $f'(c) = 0$. Доказати да постоји $\xi \in (a, b)$ тако да је $f(\xi) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$.

Напомена: Студенти раде прва три задатка, као и један од задатака 4 или 5 по избору.
У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена.

Математички факултет, Универзитет у Београду
Први колоквијум из Анализе 1
4.2.2019.

1. Дата је функција $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$.

   а) [1] Наћи реалне бројеве $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ тако да важи $f(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x} + \frac{d_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ кад $x \to \infty$ и $f(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x} + \frac{d_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ кад $x \to -\infty$.

   б) [5,5] Испитати ток и скицирати график функције $f(x)$.

   в) [1] У зависности од реалног параметра α, наћи број решења једначине $f(x) = \alpha$.

2. [7,5] Дат је скуп $S = \left\{ \frac{nm^2+2nm-n-4m^2-8m+4}{nm^2+2nm} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \left\{ \frac{10n^2}{m^2+m+7n^2} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}$. Наћи, ако постоје, $\sup S$, $\inf S$, $\max S$ и $\min S$.

3. а) [1,5] Доказати да једначина $e^x + nx = 2019$ има јединствено решење за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$.

   б) [4] За фиксиран природан број n, означимо са a_n решење једначине из (а), а затим формирајмо низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Доказати да је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан.

   в) [2] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n(n(2018 - na_n) - 2018)$.

4. а) [1,5] Доказати да је функција $f(x) = x^p$, где је $0 \leqslant p \leqslant 1$, равномерно непрекидна на $(0, \infty)$.

   б) [6] Испитати равномерну непрекидност функције $g(x) = x^{\frac{1}{3}}(\ln(1 + |x|) + 1)$ на $\mathbb{R}$.

5. [7,5] Нека је f непрекидно диференцијабилна функција на $[a, b]$ и нека постоји $c \in (a, b)$ тако да је $f'(c) = 0$. Доказати да постоји $\xi \in (a, b)$ тако да је $f(\xi) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$.

Напомена: Студенти раде прва три задатка, као и један од задатака 4 или 5 по избору.
У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена.