Математички факултет, Универзитет у Београду
Писмени испит из Анализе 1
10.6.2019.

1. [15] Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = x + \frac{e}{\ln \frac{x+2e-1}{2} - 2}.$$

2. а) [8] Израчунати интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin x}{2 + |\cos x|}\, dx.$$

б) [7] У зависности од реалног параметра $\alpha$, испитати конвергенцију интеграла

$$\int_0^{+\infty} \cos x^{\alpha}\, dx.$$

3. Дат је низ реалних бројева $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ са $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \ln(1 + \operatorname{arctg}(a_n))$ за $n \geqslant 1$.

а) [4] Доказати да низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира и наћи му граничну вредност.

б) [4] Наћи реалне константе $c$ и $\alpha$ такве да је $a_n \sim cn^{\alpha}$ кад $n \to +\infty$.

в) [4] Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} \cos a_n$.

г) [3] Наћи све $x \in \mathbb{R}$ за које конвергира ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

4. [15] Нека је $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција са непрекидним другим изводом и

$$\int_0^1 f(x)dx = 3\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx.$$

Доказати да постоји $x_0 \in (0,1)$ такав да је $f''(x_0) = 0$.

5. [15] Нека је $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција са непрекидним другим изводом таква да је $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f'(0) = f'(1) = 0$. Доказати да постоји $x_0 \in [0,1]$ такав да је $|f''(x_0)| \geqslant 4$.

**Напомена:** Студенти раде прва три задатка, као и један од задатака 4 или 5 по избору.
У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена.