Математички факултет, Универзитет у Београду
Други колоквијум из Анализе 1
2.6.2019.
Решења

1. После смене $s = x - \frac{\pi}{2}$ добијамо да је почетни интеграл једнак

$$I = \int_{-\pi/2}^{3\pi/4} \frac{ds}{(2+\cos^2 s)^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{ds}{(2+\cos^2 s)^2} + \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{ds}{(2+\cos^2 s)^2}.$$

Ако у другом интегралу уведемо смену $s - \pi = x$ добијамо

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{(2+\cos^2 x)^2} + \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{dx}{(2+\cos^2 x)^2}.$$

Након смене $\tan x = t$ (односно $x = \arctan t$) добијамо да је

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{(2t^2+3)^2} dt + \int_{-\infty}^{-1} \frac{1+t^2}{(2t^2+3)^2} dt.$$

Сада посматрамо неодређени интеграл

$$\int \frac{1+t^2}{(2t^2+3)^2} dt = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{2t^2+3} + \frac{1}{12} \int t \cdot \frac{4t}{2t^2+3} dt.$$

Ако у другом интегралу применимо парцијалну интеграцију за $u = t$ и $dv = \frac{4t}{2t^2+3}$ добијамо да је $du = dt$ и $v = -\frac{t}{2t^2+3}$, па наш неодређени интеграл постаје

$$\frac{1}{3} \int \frac{dt}{2t^2+3} + \frac{1}{12} \left(-\frac{t}{2t^2+3} + \int \frac{dt}{2t^2+3} \right) = \frac{5}{12} \int \frac{dt}{2t^2+3} - \frac{t}{12(2t^2+3)} = \frac{5}{12\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}} t \right) - \frac{t}{12(2t^2+3)} + C.$$

Ако означимо са $F(t) = \frac{5}{12\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}} t\right) - \frac{t}{12(2t^2+3)}$ из Њутн-Лајбницове теореме добијамо да је

$$I = F(+\infty) - F(-\infty) + F(-1) - F(-\infty) = \frac{15\pi}{24\sqrt{6}} + \frac{1}{60} - \frac{5}{12\sqrt{6}} \arctan(\sqrt{2/3}) \approx 0.70179.$$

2. *Први случај:* Посматрајмо подинтегралну функцију $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2-e^p)(\ln^3 x - 1)}}$. За $p > 2$ функција није дефинисана на $\left(e, e^{\frac{p}{2}}\right)$ јер за свако $x \in \left(e, e^{\frac{p}{2}}\right)$ важи $(x^2 - e^p)(\ln^3 x - 1) < 0$. Према томе, нема смисла испитивати конвергенцију интеграла за $p > 2$.

Други случај: За $p = 2$, несвојствени интеграл има сингуларитете e и $+\infty$. Посматрајмо интеграле

$$I_1 = \int_e^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-e^2)(\ln^3 x - 1)}}, \quad I_2 = \int_4^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-e^2)(\ln^3 x - 1)}}.$$

Увођењем смене $x - e = t$ добијамо

$$I_1 = \int_e^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-e^2)(\ln^3 x - 1)}} = \int_0^{4-e} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{((t+e)^2-e^2)(\ln^3(t+e) - 1)}},$$

одакле

$$\frac{1}{\sqrt{((t+e)^2-e^2)(\ln^3(t+e)-1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t(2t+e)((1+\ln(1+t/e))^3-1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2e}\sqrt{t((1+t/e)^3-1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2e}} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{3t/e}}$$
$$\sim \frac{1}{\sqrt{6}t},$$

када $t \to 0$. Добили смо да I_1 дивергира, а одатле дивергира и I.

Трећи случај: За $p < 2$ имамо интеграле

$$I_1 = \int\limits_e^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2 - e^p)(\ln^3 x - 1)}}, \quad I_2 = \int\limits_4^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2 - e^p)(\ln^3 x - 1)}}.$$

Важи

$$I_1 = \int\limits_0^{4-e} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{((t+e)^2 - e^p)(\ln^3(t+e) - 1)}},$$

одакле

$$\frac{1}{\sqrt{((t+e)^2 - e^p)(\ln^3(t+e) - 1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{(e^2 - e^p)}\sqrt{(\ln^3(t+e) - 1)}} \sim\sim \frac{1}{\sqrt{(e^2 - e^p)}\sqrt{3t/e}} \sim \frac{C}{\sqrt{t}},$$

где је $C = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{3(e^2 - e^p)}}$. Добили смо да I_1 конвергира.

Испитаћемо конвергенцију интеграла I_2. Када $x \to +\infty$ имамо $f(x) \sim \frac{1}{x \ln^{\frac{3}{2}} x}$, одакле следи да интеграл I_2 конвергира. (Искористили смо критеријум да интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ конвергира акко $\alpha > 1$ или $\alpha = 1, \beta > 1$.)
За $p < 2$ интеграл I конвергира.

3. а) Из идентитета $\sin 3n = 3\sin n - 4\sin^3 n$, добијамо $\sin^3 n = \frac{3}{4}\sin n - \frac{1}{4}\sin 3n$. По задатку са вежби, знамо да је низ парцијалних сума реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin nx$ ограничен за све $x \in \mathbb{R}$, па су специјално огранични низови парцијалних сума редова $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin 3n$, а тиме и низ парцијалних сума реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin^3 n$.

б) Користићемо три ствари познате са вежби: ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$ конвергира акко је $(p > 1)$ или $(p = 1$ и $q > 1)$; ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \sin nx$ има ограничен низ парцијалних сума за све $x \in \mathbb{R}$; ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \cos nx$ има ограничен низ парцијалних сума за све $x \in \mathbb{R}$ осим за $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Дискутоваћемо прво по параметру α јер је n доминантније од $\ln n$.
1. случај: $\alpha < 0$. Општи члан не тежи 0, па ред дивергира.
2. случај: $\alpha = 0$. Тада имамо два подслучаја:
2.1. $\beta \geqslant 0$. Општи члан не тежи 0, па ред дивергира.
2.2. $\beta < 0$. Најпре, ред обично конвергира по Дирихлеовом критеријуму: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \sin n$ има ограничен низ парцијалних сума, а $(\ln n)^\beta$ опадајуће тежи ка 0, јер за $f(x) = (\ln x)^\beta$, $f'(x) = \beta(\ln x)^{\beta-1}\frac{1}{x} < 0$ за $x \geqslant 3$.
Но, ред не конвергира апсолутно. Наиме, из оцене $|\sin^3 n| \geqslant \sin^4 n$ (која важи јер је $|\sin n| \leqslant 1$) добијамо

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\sin^3 n|}{(\ln n)^{-\beta}} \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin^4 n}{(\ln n)^{-\beta}}.$$

Даље је $\sin^4 n = (\sin^2 n)^2 = \left(\frac{1-\cos 2n}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2n + \cos^2 2n}{4} = \frac{1 - 2\cos 2n + \frac{1+\cos 4n}{2}}{4} = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2n}{2} + \frac{\cos 4n}{8}$, па је

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\sin^3 n|}{(\ln n)^{-\beta}} \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{8(\ln n)^{-\beta}} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{2(\ln n)^{-\beta}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 4n}{8(\ln n)^{-\beta}}.$$

Последња два реда конвергирају као малопре по Дирихлеовом критеријуму, док први дивергира јер је "p" $= 0$, а "q" $= -\beta > 0$, па цео ред апсолутно дивергира. Дакле, у случају $\alpha = 0$, $\beta < 0$ ред условно конвергира.
3.случај: $\alpha > 0$. Приметимо најпре да ред обично конвергира у овом случају за све $\beta \in \mathbb{R}$ на основу Дирихлеовог критеријума: из (а) знамо да $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \sin^3 n$ има ограничен низ парцијалних сума, а $\frac{\ln n^\beta}{n^\alpha}$

опадајуће тежи ка 0. Када је реч о апсолутној конвергенцији, разликујемо следећа три подслучаја:
3.1. $\alpha > 1$. Тада ред апсолутно конвергира по поредбеном критеријуму јер је

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\sin^3 n|}{n^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}},$$

а други ред конвергира ("p" $= \alpha > 1$ и "q" $= -\beta$).
3.2. $0 < \alpha < 1$. Овде ћемо опет користити процену из 2.2. Наиме,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\sin^3 n|}{n^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}} \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{8n^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{2n^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 4n}{8n^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}}, \tag{1}$$

при чему последња два реда конвергирају по Дирихлеовом критеријуму ($\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \cos 2n$ и $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \cos 4n$ имају ограничене низове парцијалних сума, а $\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}}$ опадајуће тежи 0 за $\alpha > 0$), а први дивергира ("p" $=$ $\alpha < 1$ и "q" $= -\beta$), па цео ред апсолутно дивергира. Дакле, у случају $0 < \alpha < 1$ и $\beta \in \mathbb{R}$ произвољан, ред условно конвергира.
3.3. $\alpha = 1$. Ради лакшег записа, раздвојмо и ову грану на 2 подгране:
3.3.1. $\beta < -1$. Тада ред апсолутно конвергира као у случају 3.1. ("p" $= 1$, "q" > 1).
3.3.2. $\beta \geqslant -1$. Тада ред условно конвергира као у случају 2.2., јер последња три реда у (1) конвергирају и за $\alpha = 1$, а први дивергира јер је "p" $= \alpha = 1$, "q" $= -\beta \leqslant 1$.
На крају задатка, резимирајмо закључке:
Ред дивергира у случајевима: 1.$\alpha < 0$; 2.$\alpha = 0, \beta \geqslant 0$.
Ред условно конвергира у случајевима: 1.$\alpha = 0, \beta < 0$; 2.$\alpha \in (0,1)$; 3.$\alpha = 1, \beta \geqslant -1$.
Ред апсолутно конвергира у случајевима: 1. $\alpha = 1, \beta < -1$; 2. $\alpha > 1$.

4. *Прво решење:*

Нека је $g(x) := f(x+2019)$ за $x \in [-1,1]$. $g(-1) = g(1) = 0$, $|g''(x)| \leq 2019$ и $\int\limits_{-1}^{1} g(x)dx = \int\limits_{2018}^{2020} f(x)dx$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} g(x)dx &= g(x)x|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} xg'(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{1} xg'(x)dx \\
&= -g'(x)\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} g''(x)dx \\
&= -\frac{1}{2}(g'(1) - g'(-1)) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 g''(x)dx \\
&= -\frac{1}{2}(\int_{-1}^{1} g''(x)dx) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 g''(x)dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)g''(x)dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{1} g(x)dx\right| &\leqslant \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)|g''(x)|dx \qquad (2)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)2019dx \qquad (3)\\
&= 1346. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Једнакост важи акко важи у 2 и 3. Дакле, акко $g'' \equiv \pm 2019$. Уз граничне услове ово даје $g(x) = \pm\frac{2019}{2}x^2 \mp \frac{2019}{2}$, односно $f(x) = \pm\frac{2019}{2}(x-2019)^2 \mp \frac{2019}{2}$.

Друго решење: Применимо парцијалну интеграцију на $\int\limits_{2018}^{2020} f(x)dx$. Тада је

$$\int\limits_{2018}^{2020} f(x)dx = xf(x)|_{2018}^{2020} - \int\limits_{2018}^{2020} xf'(x)dx.$$

Применом $f(2018)=f(2020)=0$ добијамо

$$\left|\int\limits_{2018}^{2020} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{2018}^{2020} xf'(x)dx\right|. \tag{5}$$

Приметимо да је, из Њутн-Лајбницове формуле,

$$\int\limits_{2018}^{2020} f'(x)dx = f(2020)-f(2018)=0,$$

одакле је

$$\int\limits_{2018}^{2020} 2019f'(x)dx = 0. \tag{6}$$

Из (5) и (6) закључујемо

$$\left|\int\limits_{2018}^{2020} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{2018}^{2020} (x-2019)f'(x)dx\right|. \tag{7}$$

Из Тејлорове формуле у Лагранжовом облику добијамо да је

$$f'(x) = f'(2019) + (x-2019)f''(\xi_x), \tag{8}$$

за неко ξ_x које је између x и 2019, па из (7) и (8) добијамо да је

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{2018}^{2020} f(x)dx\right| &= \left|\int\limits_{2018}^{2020} (x-2019)f'(2019)dx + \int\limits_{2018}^{2020} (x-2019)^2 f''(\xi_x)dx\right| \\
&= \left|\frac{(x-2019)^2}{2}f'(2019)|_{2018}^{2020} + \int\limits_{2018}^{2020} (x-2019)^2 f''(\xi_x)dx\right| \\
&= \left|\int\limits_{2018}^{2020} (x-2019)^2 f''(\xi_x)dx\right| \\
&\leqslant \int\limits_{2018}^{2020} (x-2019)^2 |f''(\xi_x)|dx \\
&\leqslant 2019\cdot\frac{(x-2019)^3}{3}|_{2018}^{2020} \\
&= 2019\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = 1346.
\end{aligned}$$

Приметимо на крају да једнакост у претходном низу важи акко $|f''(\xi_x)| = 2019$ за све ξ_x, тј. из (8) $f'(x) = f'(2019) \pm 2019x \mp 2019^2$ за све $x \in [2018,2020]$, односно $f''(x) = \pm 2019$ за све $x \in [2018,2020]$. Уз услов $f \in C^2[2018,2020]$ закључујемо да је $f''(x) = 2019$ за све $x \in [2018,2020]$ или $f''(x) = -2019$ за све $x \in [2018,2020]$. Одатле је $f(x) = \pm 2019\frac{x^2}{2} + ax + b = \pm\frac{2019}{2}(x^2+a'x+b') = \pm\frac{2019}{2}(x-2018)(x-2020)$, при чему последње важи из чињенице да је $f(2018)=f(2020)=0$.

5.

$$\begin{aligned}
\int_n^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx &= \left.\frac{-\cos x}{x}\right|_n^{+\infty} - \int_n^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx \\
&= \frac{\cos n}{n} - \left(\left.\frac{\sin x}{x^2}\right|_n^{+\infty} + 2\int_n^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_n^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx\right| &\leqslant \int_n^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^3} dx \\
&\leqslant \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_n^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{\cos n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}
$$

Ред $\sum \frac{\cos n}{n}$ конвергира условно, ред $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ конвергира апсолутно, па је закључак да ред $\sum \int_n^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ конвергира условно.