Математички факултет, Универзитет у Београду
Писмени испит из Анализе 1Б
24.9.2019.

1. [16] Израчунати интеграл
$$\int_0^{2\pi} \frac{2|\sin x| + \cos x}{3 + 2\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

2. Испитати конвергенцију следећих редова:

   а) [10] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n(n+1)} - 2n - 1}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \cos\frac{1}{n}}$, у зависности од реалног параметра α.

   б) [6] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right) \sin n.$

3. а) [6] Испитати конвергенцију интеграла
$$I(\beta,\gamma) = \int_0^1 \frac{\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^{\beta}}{x^{\gamma}}\,\mathrm{d}x,$$
   у зависности од ненегативних параметара β и γ.

   б) [12] Израчунати интеграл
$$I(1,0) = \int_0^1 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x.$$

4. Нека је f непрекидна функција на сегменту $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ таква да је $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0$.

   Ако је $F(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$, показати да:

   а) [3] $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{F(x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 0;$

   б) [7] на интервалу $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ функција F има бар једну нулу, а функција f бар две нуле.

5. [10] Нека је $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ функција са непрекидним и ненегативним првим изводом. Ако је $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и ако са l означимо дужину криве $y = f(x)$ на $[0,1]$, доказати да је
$$\sqrt{2} \le l < 2.$$

Напомена: Студенти раде прва три задатка, као и један од задатака 4 или 5 по избору.
У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена.