Математички факултет, Универзитет у Београду
Писмени испит из Анализе 1А
30.8.2019.

1. а) [12] Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2 - 2|x| + 1)$.
   б) [3] У зависности од реалног параметра α, одредити број решења једначине $f(x) = \alpha$.

2. Дат је низ реалних бројева $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ са $x_1 \in (0,1)$, $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$ за $n \geqslant 2$.
   а) [5] Доказати да низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира и наћи му граничну вредност.
   б) [5] Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.
   в) [5] Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2x_n - n}{\ln n}$.

3. [15] Наћи реалне параметре $\alpha > 0, \beta, a$ и b тако да је функција

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-(x^2+6x+10)^\beta}{x^2+6x+9}, & \text{за } x < -3 \\ a, & \text{за } x = -3 \\ \frac{e^{x+3}-1}{\operatorname{tg}(\alpha(x+3))}, & \text{за } -3 < x < 0 \\ b, & \text{за } x = 0 \\ (\cos 2x)^{\frac{-3}{2\sin^2 x}} - 1, & \text{за } 0 < x < \frac{\pi}{6} \\ 63, & \text{за } x \geq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

непрекидна на $\mathbb{R}$.

4. [15] Наћи све реалне бројеве a такве да једначина

$$\frac{3(x+1)}{\sqrt{x}} = a + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

има јединствено решење у скупу $\mathbb{R}$.

5. [15] Нека је функција $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ непрекидна на $[-1,1]$ и диференцијабилна на $(-1,1)$, таква да је $f(-1) = f(1) = 0$. Доказати да постоји $c \in (-1,1)$ за које важи да је $f(c) = (1+c^2)f'(c)$.

Напомена: Студенти раде прва три задатка, као и један од задатака 4 или 5 по избору.
У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена.