Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2а - испитни рок Септембар 1
19.8.2020.

1. Нека су (X_1, d_1) и (X_2, d_2) метрички простори и функција $f\colon X_1 \to X_2$ непрекидна. Нека је скуп $S \subset X_1$ такав да за свака два дисјунктна отворена скупа O_1 и O_2 у X_1, при чему је $S \subset O_1 \cup O_2$, важи $S \cap O_1 = \emptyset$ или $S \cap O_2 = \emptyset$. Доказати да скуп $f(S)$ има особину да за свака два дисјунктна отворена скупа V_1 и V_2 у X_2, при чему је $f(S) \subset V_1 \cup V_2$, важи $f(S) \cap V_1 = \emptyset$ или $f(S) \cap V_2 = \emptyset$.

2. Нека је дата функција
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\operatorname{arctg}\frac{y^2}{x^2},\ x \neq 0 \\ ay+b,\ x=0. \end{cases}.$$
   а) Одредити a и b тако да функција f буде непрекидна на $\mathbb{R}^2$.
   б) Наћи парцијалне изводе у произвољној тачки равни.
   в) Испитати диференцијабилност функције.

3. Нека је дата функција $f(x,y) = (x+y)e^{-(x-2)^2-(y+2)^2}$. Наћи $f(D)$, где је $D = [0, +\infty) \times [-2, +\infty)$. Испитати равномерну непрекидност функције f на D.

4. Израчунати
$$\iiint\limits_T \frac{xyz}{(9+x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz,$$
где је $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 \leqslant 9, y^2+z^2 \leqslant 9, x,y,z \geqslant 0\}$.