Математички факултет, Универзитет у Београду
Писмени испит из Анализе 2 (Р,Л)
30.8.2020.

1. Нека је $X \subset \mathbb{R}^n$ компактан скуп у метричком простору $(\mathbb{R}^n, d)$, где је d стандардна еуклидска метрика на $\mathbb{R}^n$ и $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрекидно пресликавање.
   - а) Доказати да је пресликавање $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дато са $g(x,y) = d(x,y)$ непрекидно.
   - б) Доказати да је за произвољно $\delta > 0$ скуп $\{(x,y) \in X \times X \mid d(x,y) \geq \delta\}$ компактан.
   - в) Доказати да за фиксирано $\delta > 0$ постоји $M \geq 0$ такво да $M = \max\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} \mid x,y \in X, d(x,y) \geq \delta\right\}$.
   - г) Доказати да за свако $\epsilon > 0$ постоји константа M таква да за свако $x,y \in X$ важи $|f(x) - f(y)| \leq Md(x,y) + \epsilon$.

2. Нека је дата непрекидна функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ са
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4 - \sin x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ c, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
   - а) Одредити реалну константу $c \in \mathbb{R}$ за коју је дата функција непрекидна.
   - б) Испитати диференцијабилност функције f.
   - в) Испитати да ли постоји извод у правцу произвољног јединичног вектора у тачки $(0,0)$ и израчунати га уколико постоји.
   - г) Испитати равномерну непрекидност функције f на $\mathbb{R}^2$.

3. Нека су дате тачке $A(1,0,0), B(0,1,0), C(-2,-1,0)$ и $D(1,1,1)$ у простору и функције
$$f,g,h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x + e^{(x+y-z)^2},\ g(x,y,z) = -e^{(x+y-z)^2},\ h(x,y,z) = xy.$$
   Израчунати:
   - а) $\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz$, где је γ оријентисана дуж од тачке A до тачке B;
   - б) $\iint\limits_{S} f(x,y,z)dydz + g(x,y,z)dzdx + h(x,y,z)dxdy$, где је S троугао ADB, оријентисан тако да његова нормала гради оштар угао са позитивним делом Oz-осе;
   - в) $\iint\limits_{S} f(x,y,z)dydz + g(x,y,z)dzdx + h(x,y,z)dxdy$, где је S површ коју чине троуглови ADC и BCD, оријентисани тако да њихове нормале граде оштар угао са позитивним делом Oz-осе.

4. Израчунати $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$.