Математички факултет, Универзитет у Београду
Писмени испит из Анализе 2а (Р,Л)
18.1.2020.

1. Дато је пресликавање $d : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ са:

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \begin{cases} \frac{1}{m}\ , & \text{ако } x_i = y_i \text{ за } i \in \{1,2,\dots,m-1\} \text{ и } x_m \neq y_m \\ 0\ , & \text{ако } x_n = y_n \text{ за } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   а) Доказати да је d метрика.
   б) Испитати да ли је скуп свих низова који почињу нулом отворен (затворен) у $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
   в) Испитати да ли је скуп свих низова којима су тачно два члана једнака јединици отворен (затворен) у $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
   г) Нека је дат скуп $A = \{l_k = (a_n^k)_{n=1}^{\infty} \colon k \in \mathbb{N}, a_n^k = [|\sin\frac{n\pi}{k}|]\}$, где угласте заграде означавају функцију "цео део". Наћи $\operatorname{diam} A$ и $d(l, A)$ где је l низ код којег су сви чланови једнаки нули осим седмог и 2020-тог. Да ли је низ $(l_k)_{k=1}^{\infty}$ конвергентан у $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d\right)$?

2. Нека је дата функција

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\left(1 + e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)\ , & y \neq 0 \\ ax + b\ , & y = 0. \end{cases}$$

   а) Наћи константе a и bтакве да функција f буде непрекидна на $\mathbb{R}^2$.
   б) За такве константе a и b испитати диференцијабилност функције f.

3. а) Доказати да систем једначина

$$x^2 \ln(t^2 + t + 1) + zy^2 = 0,$$
$$2019xy + \sin t \cdot e^{2020y} + 3z = 3,$$

   дефинише непрекидно диференцијабилну функцију $(t,z) = f(x,y)$ у околини тачке $(1,0)$, такву да је $f(1,0) = (0,1)$.
   б) Наћи $Df(1,0)$.
   в) Наћи линеарну апроксимацију функције f у околини тачке $(1,0)$.

4. Израчунати запремину тела које је ограничено површима $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$, $(a,b,c > 0)$.