Анализа 2 7.9.2019. Р и Л смерови

1. Дат је скуп $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}^{\mathbb{N}}$ низова од три симбола и пресликавање $d : S \times S \to \mathbb{R}$:

$$d(a,b) = \begin{cases} \frac{3}{i(a,b)} & a \neq b \\ 0 & a = b \end{cases}$$

где је $i(a,b) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_k \neq b_k\right\}$.

   (а) Доказати да је са d задата метрика.

   (б) Испитати ограниченост, затвореност и компактност скупа $A = \left\{a \in S \;\middle|\; a_7 = \gamma\right\}$.

   (в) Испитати повезаност метричког простора (S, d).

2. Дат је низ функција: $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\qquad f_n(x) = \int\limits_0^x \left(e^{-nx} + \sin^2\left(t + \frac{1}{n}\right)\right) dt.$

   (а) Испитати равномерну конвергенцију низа f_n.

   (б) Испитати равномерну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{x\cos(n\pi) f_n(x)}{n}$ на интервалу $[0, \frac{\pi}{3}]$.

3. Израчунати максимум и минимум функције: $f : D \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y,z) = (x+y+z)^3$
ако је $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geqslant 0,\ z \geqslant x^2 + y^2,\ 3x + 2y + z = 1\right\}$.

4. Израчунати интеграл $\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds}$ ако је дато векторско поље $F(x,y,z) = (x^2 + \sin y^2, y^2 + \sin z^2, z + \sin xy)$
а површ S је руб тела T ограниченог површима $2(x^2 + y^2) = z$ и $x^2 + y^2 + 1 = z$, оријентисана ка споља.

5. Развити у Фуријеов тригонометријски ред функцију $f(x) = \begin{cases} c + \cos \pi x & x \in [0,1] \\ \sin \pi x & x \in (-1, 0) \end{cases}$, где је c произвољна реална константа. Може ли се одредити вредност c тако да добијени ред равномерно конвергира на интервалу $[-1, 1]$.

Напомена: задаци 1. и 2. су обавезни, а ради се још два задатка од преостала три по избору.

Анализа 2 7.9.2019. Р и Л смерови

1. Дат је скуп $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}^{\mathbb{N}}$ низова од три симбола и пресликавање $d : S \times S \to \mathbb{R}$:

$$d(a,b) = \begin{cases} \frac{3}{i(a,b)} & a \neq b \\ 0 & a = b \end{cases}$$

где је $i(a,b) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_k \neq b_k\right\}$.

   (а) Доказати да је са d задата метрика.

   (б) Испитати ограниченост, затвореност и компактност скупа $A = \left\{a \in S \;\middle|\; a_7 = \gamma\right\}$.

   (в) Испитати повезаност метричког простора (S, d).

2. Дат је низ функција: $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\qquad f_n(x) = \int\limits_0^x \left(e^{-nx} + \sin^2\left(t + \frac{1}{n}\right)\right) dt.$

   (а) Испитати равномерну конвергенцију низа f_n.

   (б) Испитати равномерну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{x\cos(n\pi) f_n(x)}{n}$ на интервалу $[0, \frac{\pi}{3}]$.

3. Израчунати максимум и минимум функције: $f : D \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y,z) = (x+y+z)^3$
ако је $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geqslant 0,\ z \geqslant x^2 + y^2,\ 3x + 2y + z = 1\right\}$.

4. Израчунати интеграл $\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds}$ ако је дато векторско поље: $F(x,y,z) = (x^2 + \sin y^2, y^2 + sinz^2, z + \sin xy)$
а површ S је руб тела T ограниченог површима $2(x^2 + y^2) = z$ и $x^2 + y^2 + 1 = z$, оријентисана ка споља.

5. Развити у Фуријеов тригонометријски ред функцију $f(x) = \begin{cases} c + \cos \pi x & x \in [0,1] \\ \sin \pi x & x \in (-1, 0) \end{cases}$, где је c произвољна реална константа. Може ли се одредити вредност c тако да добијени ред равномерно конвергира на $[-1, 1]$.

Напомена: задаци 1. и 2. су обавезни, а ради се још два задатка од преостала три по избору.