Анализа 2
Јун 2

1. Нека је (X,d) метрички простор. Метрика d се назива ултраметрика ако је

$$d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(z,y)\}, \forall x,y,z \in X.$$

а) Испитати да ли ја еуклидска метрика на $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ултраметрика.
б) Нека је p произвољан прост број, $p \ge 2$. За сваки $x \in \mathbb{Q}$, $x \ne 0$, постоји јединствен цео број $n \in \mathbb{Z}$, тако да је $x = p^n \frac{u}{v}$, за неке целе бројеве u и v који нису дељиви са p. Дефинишимо $|x|_p = n$. Показати да је са

$$d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = y; \\ \left(\frac{1}{p}\right)^{|x-y|_p} & , x \ne y; \end{cases}$$

дефинисана ултраметрика на $\mathbb{Q}$ (позната је као p-адска метрика).

2. Нека је $B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ и нека је $V = V_n$ Жорданова мера у $\mathbb{R}^n$. За $n > 2$ означимо са (x,y) елемент из $\mathbb{R}^n$, тако да је $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^{n-2}$.
а) Доказати да је:

$$V_n(B_n) = \int_{B_2} \int_{\sqrt{1-|x|^2} B_{n-2}} dV_{n-2}(y) dV_2(x).$$

б) Доказати да је:

$$V(B_n) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} & , n \text{ парно;} \\ \\ \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} & , n \text{ непарно.} \end{cases}$$

3. Нека је површ S_1 дата једначином $z = 8x^2$, површ S_2 дата једначином $z = 1 - x^2 - 4y^2$, а тело T је ограничено површима S_1 и S_2. Израчунати:

$$\iint\limits_S x\ dydz + y\sqrt{x^2+y^2+z}\ dzdx + 2z\ dxdy,$$

где је S граница тела T оријентисана спољном нормалом.

4. а) Доказати да за све $s > 0$ важе следеће једнакости :

$$B(s,s) \cdot 2^{2s-1} = B\left(\frac{1}{2}, s\right),$$

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2s) \cdot 2^{1-2s}\sqrt{\pi}.$$

б) Одредити:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} \log x dx,$$

ако се зна да је $\Gamma'(1) = -\gamma$, где је γ Ојлерова константа.