# Анализа 2    18.6.2019.

1. Дат је метрички простор $(X,d)$ и непрекидно пресликавање $f: X \to X$. Означимо $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$, уз договор да је $f^0$ идентитета.
   (а) Доказати да је дефинисана метрика са $d_n(x,y) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \big(d(f^i(x), f^i(y))\big)$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
   (б) Ако је $f$ изометрија или контракција доказати да је $d_n \equiv d$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
   (в) Доказати да је за свако $n \in \mathbb{N}$ метрика $d_n$ тополошки еквивалентна метрици $d$. (Задаје исте отворене скупове)
   (г) Доказати да је са: $d_\infty(x,y) = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}_0} \big(d(f^i(x), f^i(y))\big)$ такође задата метрика, али не мора задавати исте отворене скупове.
2. Дато је пресликавање:
$$h: D \to \mathbb{R} \qquad h(x,y) = \frac{x+1}{2y+4} + 2y + \frac{27}{x+1} - 17$$
   Где је област $D$ одређена са $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 5 < x < 11,\ -1 < y < 0\big\}$. Одредити слику области $D$ при пресликавању $h$.
3. Израчунати интеграл $\iint\limits_S \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{ds}$ ако је векторско поље $\overrightarrow{F}$ задато са $\overrightarrow{F} = (x - 3y + 2z, -3x + 2y + z, 2x + y - 3z)$, површ $S$ са $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geqslant \beta,\ \beta < 0\big\}$ , оријентисана тако да полуправа одређена тачком са површи и вектором нормале сече све три координатне осе.
4. Израчунати интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{y\ e^{\alpha y}}{1 - e^{\alpha y}}\,dy \qquad \alpha \neq 0.$
5. Дато је пресликавање $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(t) = (t) \sin \pi t$ где је са $(t)$ означено растојање до најближег целог броја у стандардној метрици. Одредити најмањи период $T$ пресликавања $g$, а затим развити $g$ у Фуријеов тригонометријски ред на $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

**Напомена: задатак 1. је обавезан, а ради се још три задатка од преостала четри по избору**


# Анализа 2    18.6.2019.

1. Дат је метрички простор $(X,d)$ и непрекидно пресликавање $f: X \to X$. Означимо $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$, уз договор да је $f^0$ идентитета.
   (а) Доказати да је дефинисана метрика са $d_n(x,y) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \big(d(f^i(x), f^i(y))\big)$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
   (б) Ако је $f$ изометрија или контракција доказати да је $d_n \equiv d$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
   (в) Доказати да је за свако $n \in \mathbb{N}$ метрика $d_n$ тополошки еквивалентна метрици $d$. (Задаје исте отворене скупове)
   (г) Доказати да је са: $d_\infty(x,y) = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}_0} \big(d(f^i(x), f^i(y))\big)$ такође задата метрика, али не мора задавати исте отворене скупове.
2. Дато је пресликавање:
$$h: D \to \mathbb{R} \qquad h(x,y) = \frac{x+1}{2y+4} + 2y + \frac{27}{x+1} - 17$$
   Где је област $D$ одређена са $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 5 < x < 11,\ -1 < y < 0\big\}$. Одредити слику области $D$ при пресликавању $h$.
3. Израчунати интеграл $\iint\limits_S \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{ds}$ ако је векторско поље $\overrightarrow{F}$ задато са $\overrightarrow{F} = (x - 3y + 2z, -3x + 2y + z, 2x + y - 3z)$, површ $S$ са $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geqslant \beta,\ \beta < 0\big\}$ , оријентисана тако да полуправа одређена тачком са површи и вектором нормале сече све три координатне осе.
4. Израчунати интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{y\ e^{\alpha y}}{1 - e^{\alpha y}}\,dy \qquad \alpha \neq 0.$
5. Дато је пресликавање $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(t) = (t) \sin \pi t$ где је са $(t)$ означено растојање до најближег целог броја у стандардној метрици. Одредити најмањи период $T$ пресликавања $g$, а затим развити $g$ у Фуријеов тригонометријски ред на $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

**Напомена: задатак 1. је обавезан, а ради се још три задатка од преостала четри по избору**