

1. Нека је $d(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1 - 1| + |\angle z_1 O z_2| + |z_2 - 1| & z_1 \neq z_2 \\ 0 & z_1 = z_2 \end{cases}$ где су $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

а) Доказати да је D метрика на скупу $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

б) Описати кугле $B[0, \frac{1}{2}], B[1, \frac{1}{2}], B[2i, 2]$ у овој метрици.

в) Да ли је метрика d тополошки еквивалентна уобичајеној метрици?

г) Испитати непрекидност пресликавања $f : (\mathbb{C} \setminus \{0\}, d) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, ||), f(z) = [|z|]$.

(Ознака $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$, док је са $[x]$ означен највећи цео број који је мањи или једнак $x \in \mathbb{R}$.)

2. Нека је $g(x, y, z, t) = y(\cos x + \sin x) - te^{-t} + z, (x, y, z, t) \in D$, где је скуп D дефинисан помоћу неједнакости $0 \leq x \leq 2\pi, y \geq 0, y^2 \leq z \leq 1, t \geq 0$. Доказати да функција g достиже минимум и максимум да скупу D , а затим одредити тачке у којима се минимум и максимум постижу.

3. Израчунати $\int_C z^2 dx + y^2 dy + x dz$ где је C троугао са теменима $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, оријентисан позитивно, глеано из тачке $(0, 0, 2)$.

4. Ако знамо да све на скупу \mathbb{R} диференцијабилне функције f за које важи $f''(t) = f(t), t \in \mathbb{R}$ имају општи облик

$$f(t) = ae^t + be^{-t}, a, b \in \mathbb{R} \text{ израчунати интеграл } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \cos t}{t^2 + y^2} dy. \text{ (Упутство: } \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\frac{t}{t^2 + y^2}) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\frac{t}{t^2 + y^2}))$$

5. Ако је $g_n(x) = \sum_{k=0}^n (x - \frac{k}{n})^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, x \in [0, 1]$ испитати равномерну конвергенцију низа g_n .

Раде се задаци 1. и 2. и бира два задатка од задатака 3, 4. и 5.