Анализа 2 Анализа 2а Л и Р смерови 5.2.2019.

1. (а) Доказати да је на $\mathbb{R}^2$ задата метрика са:

$$d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad d\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)=\begin{cases}\parallel(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\parallel, & (x_1,y_1),(x_2,y_2)\text{ су линеарно зависни}\\ \parallel(x_1,y_1)\parallel+\parallel(x_2,y_2)\parallel, & (x_1,y_1),(x_2,y_2)\text{ су линерано независни}\end{cases}$$

(б) Описати затворене кугле полупречника 1 у метрици d..

(в) Испитати непрекидност пресликавања

$$f:\left(\mathbb{R}^2,e\right)\to\left(\mathbb{R}^2,d\right)\qquad f(x)=x$$

ако је са e означена еуклидска метрика.

(г) Ако се подразумева метрика d испитати конвергенцију низова:

$$a_n=\left(\frac{1}{n},\ 3+\frac{1}{n}\right),\ b_n=\left(3+\frac{1}{n},\ 3+\frac{1}{n}\right)$$

2. Дато је пресликавање $f:D\to\mathbb{R}\qquad f(x,y,z)=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$ где је

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z\geq1\right\}.$$

(а) Доказати да за $x,y\in D$ важи $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq2$.

(б) Доказати да ако је $x\geq\frac{1}{2}$ или $y\geq\frac{1}{2}$ или $z\geq\frac{1}{2}$ тада је $f(x,y,z)>1$.

(в) Доказати да функција f на D достиже апсолутни минимум.

(г) Одредити слику домена D.

3. Израчунати интеграл $\iiint\limits_T(e+\pi\arctan y)\ dxdydz$ ако је тело T одређено са

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ (z-10)^2\geq4x^2+9y^2,\ \left(\tfrac{2}{3}x\right)^2+(|y|-3)^2\leq9\right\}.$$

4. Дата су пресликавања:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\qquad f(x,y,z)=e^{-\max\{|x|^p,|y|^p,|z|^p\}}$$
$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad g(x,y)=f(x,y,x-y).$$

У зависности од реалног параметра $p>0$ испитати диференцијабилност и равномерну непрекидност ових пресликавања на доменима.

Анализа 2 Анализа 2а Л и Р смерови 5.2.2019.

1. (а) Доказати да је на $\mathbb{R}^2$ задата метрика са:

$$d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad d\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)=\begin{cases}\parallel(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\parallel, & (x_1,y_1),(x_2,y_2)\text{ су линеарно зависни}\\ \parallel(x_1,y_1)\parallel+\parallel(x_2,y_2)\parallel, & (x_1,y_1),(x_2,y_2)\text{ су линерано независни}\end{cases}$$

(б) Описати затворене кугле полупречника 1 у метрици d..

(в) Испитати непрекидност пресликавања

$$f:\left(\mathbb{R}^2,e\right)\to\left(\mathbb{R}^2,d\right)\qquad f(x)=x$$

ако је са e означена еуклидска метрика.

(г) Ако се подразумева метрика d испитати конвергенцију низова:

$$a_n=\left(\frac{1}{n},\ 3+\frac{1}{n}\right),\ b_n=\left(3+\frac{1}{n},\ 3+\frac{1}{n}\right)$$

2. Дато је пресликавање $f:D\to\mathbb{R}\qquad f(x,y,z)=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$ где је

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z\geq1\right\}.$$

(а) Доказати да за $x,y\in D$ важи $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq2$.

(б) Доказати да ако је $x\geq\frac{1}{2}$ или $y\geq\frac{1}{2}$ или $z\geq\frac{1}{2}$ тада је $f(x,y,z)>1$.

(в) Доказати да функција f на D достиже апсолутни минимум.

(г) Одредити слику домена D.

3. Израчунати интеграл $\iiint\limits_T(e+\pi\arctan y)\ dxdydz$ ако је тело T одређено са

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ (z-10)^2\geq4x^2+9y^2,\ \left(\tfrac{2}{3}x\right)^2+(|y|-3)^2\leq9\right\}.$$

4. Дата су пресликавања:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\qquad f(x,y,z)=e^{-\max\{|x|^p,|y|^p,|z|^p\}}$$
$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad g(x,y)=f(x,y,x-y).$$

У зависности од реалног параметра $p>0$ испитати диференцијабилност и равномерну непрекидност ових пресликавања на доменима.