Други колоквијум из Анализе 1 - 2. 6. 2022.

1. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ и нека је $\alpha > -1$.

   а) Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $c_n \in [n, n+1]$ такво да је $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)t^\alpha\,dt = f(c_n)\,\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

   б) Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}} \int_n^{n+1} f(t)t^\alpha\,dt$.

   в) Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)x^\alpha\,dx$.

2. а) Одредити $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$.

   б) Нека је $I_n = -2\displaystyle\int_{e^{\frac{\pi}{4}}}^{e^{(2n)!\pi}} \sin(\ln x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$. Израчунати I_n.

   в) Ако је $a_n = \frac{(n+1)\pi}{\ln I_n}$, $n \in \mathbb{N}$, одредити област конвергенције реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

   г) Израчунати $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

3. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_0^{2022} \frac{\sqrt[3]{x}\arctan x^{\frac{3}{2}}}{\ln(1+x^2)\sin\sqrt{x}}\,dx$.

4. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \frac{1}{n^q}$ у зависности од параметара $p, q \in \mathbb{R}$.