Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р смер) - испитни рок септембар 1
9.9.2021.

1. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Кажемо да је скуп $E \subset X$ *локално мерљив* ако $E \cap A \in \mathfrak{M}$ за све $A \in \mathfrak{M}$ такве да је $\mu(A) < +\infty$. Дефинишимо

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{E \subseteq X \mid E \text{ је локално мерљив}\}.$$

   а) [7] Доказати да је $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$ и да је $\overline{\mathfrak{M}}$ σ-алгебра.

   Простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ називамо *засићеним* ако важи $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}$. Меру μ на мерљивом простору $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ зовемо *σ-коначна* ако је $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$, при чему је $\mu(E_n) < +\infty$ за све $n \in \mathbb{N}$.

   б) [4] Ако је μ σ-коначна, доказати да је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ засићен.

   Дефинишимо функцију $\overline{\mu} : \overline{\mathfrak{M}} \to [0, +\infty]$ као

$$\overline{\mu}(E) = \begin{cases} \mu(E), & \text{ако } E \in \mathfrak{M}, \\ +\infty, & \text{ако } E \in \overline{\mathfrak{M}} \setminus \mathfrak{M}. \end{cases}$$

   в) [7] Доказати да је $\overline{\mu}$ мера на $(X, \overline{\mathfrak{M}})$.

   г) [4] Ако је мера μ комплетна на простору са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, доказати да је и мера $\overline{\mu}$ такође комплетна на простору са мером $(X, \overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mu})$.

   д) [4] Доказати да је $(X, \overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mu})$ засићен простор са мером. У литератури се он назива *засићење* простора са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

2. а) [15] Дефинисати Лебегову σ алгебру и Лебегову меру.

   б) [6] Навести три σ-алгебре које су садржане у Лебеговој σ алгебри.

   в) [4] Објаснити да ли су карактеристична функција Канторовог скупа и Канторова сингуларна функција Лебег мерљиве.

3. а) [15] Доказати Левијев став.

   б) [10] Израчунати $\int\limits_0^{+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{ne^{nx}}\, dx$.

4. Дат је низ функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$f_n(x) = \chi_{[n^\alpha, 2n^\alpha]}(x),$$

   где је α реалан број. У зависности од параметра α, испитати конвергенцију низа $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

   а) [8] μ-скоро свуда;

   б) [8] у простору $L^1(\mathbb{R}, \mu)$;

   в) [8] по мери μ,

   где је μ Лебегова мера на $\mathbb{R}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења:

1. а) Узмимо произвољан скуп $E \in \mathfrak{M}$. Тада наравно за сваки $A \in \mathfrak{M}$, па и конкретно за A који је коначне мере важи $A \cap E \in \mathfrak{M}$ јер је $\mathfrak{M}$ σ-алгебра. Одатле следи да $E \in \overline{\mathfrak{M}}$. Докажимо сада да је $\overline{\mathfrak{M}}$ σ-алгебра. Прво, $\emptyset \in \overline{M}$ јер $\emptyset \cap A = \emptyset \in \mathfrak{M}$ за све $A \in \mathfrak{M}$ па тим и за све A коначне мере. Мало је сложенији посао доказати да ако $E \in \overline{\mathfrak{M}}$, онда и $E^c \in \overline{\mathfrak{M}}$. Узмимо произвољан скуп $A \in \mathfrak{M}$ коначне мере. Треба доказати да $E^c \cap A \in \mathfrak{M}$. Приметимо да важи следећи низ једнакости

$$E^c \cap A = \emptyset \cup (E^c \cap A) = (A^c \cap A) \cup (E^c \cap A) = (A^c \cup E^c) \cap A = (A \cap E)^c \cap A.$$

Последњи скуп припада $\mathfrak{M}$ јер по услову да $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ следи да $A \cap E \in \mathfrak{M}$, па и $(A \cap E)^c \in \mathfrak{M}$ (јер је $\mathfrak{M}$ σ-алгебра), а онда применимо само да пресек два скупа из σ-алгебре остаје у σ-алгебри. На крају, претпоставимо да $E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$ за све $n \in \mathbb{N}$ и нека је $A \in \mathfrak{M}$ произвољан скуп коначне мере. Тада је $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \cap A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (E_n \cap A)$, а последња унија припада $\mathfrak{M}$ јер сваки $E_n \cap A \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ је σ-алгебра. Тиме смо доказали да и $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$, а самим тим и да је $\overline{\mathfrak{M}}$ једна σ-алгебра.

   б) Један смер знамо из а), па треба показати да је и $\overline{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}$. Узмимо произвољан $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ и нека је $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$, при чему је $\mu(E_n) < +\infty$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$E = E \cap X = E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(E \cap E_n),$$

а последња унија је у $\mathfrak{M}$ јер је сваки $E \cap E_n \in \mathfrak{M}$ из претпоставке да је мера сваког E_n коначна. Тиме смо доказали да је $E \in \mathfrak{M}$, па важи да је $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}$.

   в) Најпре, $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ ($\emptyset \in \mathfrak{M}$ и μ је мера). Преостало је да докажемо да важи $\overline{\mu}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{\mu}\left(E_n\right)$. Ако су сви $E_n \in \mathfrak{M}$, ово следи по дефиницији мере $\overline{\mu}$ која се поклапа са μ на $\mathfrak{M}$. Ако постоји E_j који се не налази у $\mathfrak{M}$, онда је $\overline{\mu}(E_j) = +\infty$. Ако $\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \notin \mathfrak{M}$, онда је и $\overline{\mu}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty$, па важи $\overline{\mu}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{\mu}\left(E_n\right)$. Остаје да проверимо случај када постоји $E_j \notin \mathfrak{M}$, а да важи $\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathfrak{M}$. У том случају је десна страна поново $+\infty$ (јер је $\overline{\mu}(E_j) = +\infty$). Ако би важило да је $\overline{\mu}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) < +\infty$, тада би по дефиницији $\overline{\mathfrak{M}}$ имали да $E_j = E_j \cap \left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \in \mathfrak{M}$, што је супротно претпоставци. Дакле, важи да је $\overline{\mu}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty$ па су и овде лева и десна страна једнаке.

   г) Узмимо произвољан скуп $F \in \overline{\mathfrak{M}}$ такав да је $\overline{\mu}(F) = 0$ и $E \subseteq F$. Из чињенице да је $\overline{\mu}(F) = 0$ закључујемо да је $\mu(F) = \overline{\mu}(F) = 0$. Како је μ комплетна, то $E \in \mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$ па смо показали и да је $\overline{\mu}$ комплетна.

   д) Узмимо произвољан скуп $E \subseteq X$ такав да је $E \cap A \in \overline{\mathfrak{M}}$ за све $A \in \overline{\mathfrak{M}}$ такве да је $\overline{\mu}(A) < +\infty$. Треба доказати да $E \in \overline{\mathfrak{M}}$, тј. да за произвољно $B \in \mathfrak{M}$ за које је $\mu(B) < +\infty$ важи да $E \cap B \in \mathfrak{M}$. Како је $B \in \mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$, то је $\overline{\mu}(B) = \mu(B) < +\infty$, па по претпоставци знамо да $E \cap B \in \overline{\mathfrak{M}}$. Даље, како је $\mu(B) < +\infty$, то је $(E \cap B) \cap B \in \mathfrak{M}$ (ово је из дефиниције $\overline{\mathfrak{M}}$). Но, $(E \cap B) \cap B = E \cap B$, па смо показали да $E \cap B \in \mathfrak{M}$, што је и био циљ.

2. а) Нека је $\mathcal{J} = \{[a,b) | -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ полуалгебра полузатворених интервала и $m : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ мера на њој дефинисана са $m([a,b)) = b - a$. Продужимо ову меру на минималну алгебру $\mathcal{A}$ која

садржи $\mathcal{J}$. Сваки елемент из алгебре $\mathcal{A}$ је облика $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}[a_k, b_k)$, за произвољне $-\infty \leq a_k \leq b_k < a_{k+1} \leq \infty$ и дефинишемо меру $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ са $m\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}[a_k, b_k)\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$. Сада продужимо меру m до спољне мере m^* на партитивном скупу од $\mathbb{R}$. Уз помоћ m^* и алгебре $\mathcal{A}$ дефинишемо Каратеодоријеву σ-алгебру $\mathfrak{M}_L$ коју називамо Лебегова σ-алгебра. (Она садржи алгебру $\mathcal{A}$.) Рестрикција спољне мере m^* на $\mathfrak{M}_L$ се назива Лебегова мера. (Погледати 4. недељу на е-настави.)

б) $\mathfrak{M}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ је минимална σ-алгебра над $\mathbb{R}$ и сигурно је садржана у свакој σ-алгебри над $\mathbb{R}$, па је садржана и у Лебеговој. $\mathfrak{M}_2 = \{\emptyset, (-\infty, 1), [1, \infty), \mathbb{R}\}$ је σ-алгебра над $\mathbb{R}$ и важи $\mathfrak{M}_2 \subset \mathcal{J} \subset \mathfrak{M}_L$. Нека је $\mathfrak{M}_3$ Борелова σ-алгебра. Она је садржана у Лебеговој, зато што је то минимална σ-алгебра над полуалгебром $\mathcal{J}$.

в) Канторов скуп K је Борел мерљив, па и Лебег мерљив. Дакле, $K \in \mathfrak{M}_L$ па је функција χ_K Борел мерљива и Лебег мерљива. Канторова сингуларна функција је непрекидна па је Борел мерљива па и Лебег мерљива. (Погледати 6. недељу на е-настави.)

3. а) Став 3.25. у књизи. (9. недеља на е-настави.)

б) Да бисмо применили Левијев став треба показати да $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}|f_n(x)|\,dx$ конвергира, при чему је $f_n(x) = \frac{\cos nx}{ne^{nx}}$. Важи $|f_n| \leq \frac{1}{ne^{nx}}$ ($|\cos(nx)| \leqslant 1$) па је на основу првог поредбеног критеријума за несвојствене интеграле $\int\limits_{0}^{+\infty}|f_n(x)|\,dx \leq \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{ne^{nx}}\,dx$. У интегралу са десне стране уводимо смену $nx = t$ па је $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{ne^{nx}}\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{n^2e^t}\,dt = \frac{1}{n^2}$. Пошто $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конвергира (ова сума је $\frac{\pi^2}{6}$) онда и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}|f_n(x)|\,dx$ конвергира.

Израчунајмо тражени интеграл. На основу Левијевог става важи $\int\limits_{0}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}f_n(x)\,dx$. Интеграл на десној страни ћемо решити уз помоћ смене $nx = t$ и парцијалне интеграције.

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{ne^{nx}}dx = \frac{1}{n^2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos t}{e^t}dt = \left\{\begin{array}{l} u(t) = e^{-t} \\ v(t) = \sin t \end{array}\right\} = \frac{1}{n^2}\int\limits_{0}^{\infty}\sin t e^{-t}dt = \left\{\begin{array}{l} u(t) = e^{-t} \\ v(t) = -\cos t \end{array}\right\} = \frac{1}{n^2}(1 - I),$$

при чему је $I = \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos t}{e^t}dt$. Дакле $I = 1 - I$ тј. $I = 1/2$ и $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{ne^{nx}}dx = \frac{1}{2n^2}$. Следи

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{ne^{nx}}\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4. Урадићемо прво случај $\alpha = 0$. Тада је $f_n(x) = \chi_{[1,2]}(x)$, дакле константан низ. Константан низ конвергира ка истој тој константи за сваку дефиницију конвергенције а), б) и в).

Нека је $\alpha > 0$.

а) Важи $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Дакле f_n конвергира ка функцији $f = 0$ свуда, па и μ-скоро свуда.

б) Прво приметимо да важи $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ за све $n \in \mathbb{N}$, јер је $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = n^\alpha < \infty$ па има смисла говорити о конвергенцији у L^1 норми. Пошто важи $\int\limits_{\mathbb{R}}|f_n(x) - 0|dx = n^\alpha \to \infty$ следи да низ f_n не конвергира у L^1 норми.

в) Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Скуп свих $x \in \mathbb{R}$ где је $|f_n(x) - 0| > \epsilon$ је или празан (ако је $\epsilon \geq 1$) или $[n^\alpha, 2n^\alpha]$ ако је $\epsilon < 1$. Дакле, тај скуп је највише мере n^α. Пошто је $\alpha > 0$ онда је лимес низа мера ∞, па не важи конвергенција по мери.

Нека је на крају $\alpha < 0$.

а) Најпре је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\{0\}}(x)$ (тачка по тачка). Дакле f_n ковергира μ-скоро свуда ка функцији $f \equiv 0$, јер се $\chi_{\{0\}}(x)$ и нула функција разликују само у једној тачки (у $x = 0$) што је скуп Лебегове мере 0.

б) Опет приметимо да важи $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ за све $n \in \mathbb{N}$, јер је $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = n^\alpha < \infty$ па има смисла говорити о о конвергенцији у L^1 норми. Једини кандидат јесте функција $f \equiv 0$, па треба израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\, dx = n^\alpha \to 0$ кад $n \to \infty$, па $f_n \to 0$ у L^1 норми.

в) Из конвергенције у L^1 норми следи конвергенција у мери, па закључујемо да $f_n \to 0$ по мери μ.