Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Л смер) - испитни рок септембар 1
9.9.2021.

1. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Кажемо да је скуп $E \subset X$ *локално мерљив* ако $E \cap A \in \mathfrak{M}$ за све $A \in \mathfrak{M}$ такве да је $\mu(A) < +\infty$. Дефинишимо

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{E \subseteq X \mid E \text{ је локално мерљив}\}.$$

   а) [5] Доказати да је $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$ и да је $\overline{\mathfrak{M}}$ σ-алгебра.

   Простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ називамо *засићеним* ако важи $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}$. Меру μ на мерљивом простору $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ зовемо *σ-коначна* ако је $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$, при чему је $\mu(E_n) < +\infty$ за све $n \in \mathbb{N}$.

   б) [2] Ако је μ σ-коначна, доказати да је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ засићен.

   Дефинишимо функцију $\overline{\mu} : \overline{\mathfrak{M}} \to [0, +\infty]$ као

$$\overline{\mu}(E) = \begin{cases} \mu(E), & \text{ако } E \in \mathfrak{M}, \\ +\infty, & \text{ако } E \in \overline{\mathfrak{M}} \setminus \mathfrak{M}. \end{cases}$$

   в) [5] Доказати да је $\overline{\mu}$ мера на $(X, \overline{\mathfrak{M}})$.

   г) [2] Ако је мера μ комплетна на простору са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, доказати да је и мера $\overline{\mu}$ такође комплетна на простору са мером $(X, \overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mu})$.

   д) [2] Доказати да је $(X, \overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mu})$ засићен простор са мером. У литератури се он назива *засићење* простора са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

2. [10] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f : X \to [0, +\infty]$ је $\mathfrak{M}$-мерљива функција. Доказати да важи

$$\int\limits_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \left(\frac{k-1}{2^n} \mu \left(\left\{ x \in X \mid \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \right) \right).$$

3. [12] Израчунати $\int\limits_0^{+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{ne^{nx}}\, dx$.

4. Дат је низ функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$f_n(x) = \chi_{[n^\alpha, 2n^\alpha]}(x),$$

   где је α реалан број. У зависности од α, испитати конвергенцију низа $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

   а) [4] μ-скоро свуда;

   б) [4] У простору $L^1(\mathbb{R}, \mu)$;

   в) [4] по мери μ,

   где је μ Лебегова мера на $\mathbb{R}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења:

1. а) Узмимо произвољан скуп $E \in \mathfrak{M}$. Тада наравно за сваки $A \in \mathfrak{M}$, па и конкретно за A који је коначне мере важи $A \cap E \in \mathfrak{M}$ јер је $\mathfrak{M}$ σ-алгебра. Одатле следи да $E \in \overline{\mathfrak{M}}$. Докажимо сада да је $\overline{\mathfrak{M}}$ σ-алгебра. Прво, $\emptyset \in \overline{M}$ јер $\emptyset \cap A = \emptyset \in \mathfrak{M}$ за све $A \in \mathfrak{M}$ па тим и за све A коначне мере. Мало је сложенији посао доказати да ако $E \in \overline{\mathfrak{M}}$, онда и $E^c \in \overline{\mathfrak{M}}$. Узмимо произвољан скуп $A \in \mathfrak{M}$ коначне мере. Треба доказати да $E^c \cap A \in \mathfrak{M}$. Приметимо да важи следећи низ једнакости

$$E^c \cap A = \emptyset \cup (E^c \cap A) = (A^c \cap A) \cup (E^c \cap A) = (A^c \cup E^c) \cap A = (A \cap E)^c \cap A.$$

Последњи скуп припада $\mathfrak{M}$ јер по услову да $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ следи да $A \cap E \in \mathfrak{M}$, па и $(A \cap E)^c \in \mathfrak{M}$ (јер је $\mathfrak{M}$ σ-алгебра), а онда применимо само да пресек два скупа из σ-алгебре остаје у σ-алгебри. На крају, претпоставимо да $E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$ за све $n \in \mathbb{N}$ и нека је $A \in \mathfrak{M}$ произвољан скуп коначне мере. Тада је $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \cap A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (E_n \cap A)$, а последња унија припада $\mathfrak{M}$ јер сваки $E_n \cap A \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ је σ-алгебра. Тиме смо доказали да и $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$, а самим тим и да је $\overline{\mathfrak{M}}$ једна σ-алгебра.

б) Један смер знамо из а), па треба показати да је и $\overline{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}$. Узмимо произвољан $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ и нека је $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$, при чему је $\mu(E_n) < +\infty$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$E = E \cap X = E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E \cap E_n),$$

а последња унија је у $\mathfrak{M}$ јер је сваки $E \cap E_n \in \mathfrak{M}$ из претпоставке да је мера сваког E_n коначна. Тиме смо доказали да је $E \in \mathfrak{M}$, па важи да је $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}$.

в) Најпре, $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ ($\emptyset \in \mathfrak{M}$ и μ је мера). Преостало је да докажемо да важи $\overline{\mu}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{\mu}(E_n)$. Ако су сви $E_n \in \mathfrak{M}$, ово следи по дефиницији мере $\overline{\mu}$ која се поклапа са μ на $\mathfrak{M}$. Ако постоји E_j који се не налази у $\mathfrak{M}$, онда је $\overline{\mu}(E_j) = +\infty$. Ако $\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \notin \mathfrak{M}$, онда је и $\overline{\mu}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty$, па важи $\overline{\mu}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{\mu}(E_n)$. Остаје да проверимо случај када постоји $E_j \notin \mathfrak{M}$, а да важи $\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathfrak{M}$. У том случају је десна страна поново $+\infty$ (јер је $\overline{\mu}(E_j) = +\infty$). Ако би важило да је $\overline{\mu}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) < +\infty$, тада би по дефиницији $\overline{\mathfrak{M}}$ имали да $E_j = E_j \cap \left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \in \mathfrak{M}$, што је супротно претпоставци. Дакле, важи да је $\overline{\mu}\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty$ па су и овде лева и десна страна једнаке.

г) Узмимо произвољан скуп $F \in \overline{\mathfrak{M}}$ такав да је $\overline{\mu}(F) = 0$ и $E \subseteq F$. Из чињенице да је $\overline{\mu}(F) = 0$ закључујемо да је $\mu(F) = \overline{\mu}(F) = 0$. Како је μ комплетна, то $E \in \mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$ па смо показали и да је $\overline{\mu}$ комплетна.

д) Узмимо произвољан скуп $E \subseteq X$ такав да је $E \cap A \in \overline{\mathfrak{M}}$ за све $A \in \overline{\mathfrak{M}}$ такве да је $\overline{\mu}(A) < +\infty$. Треба доказати да $E \in \overline{\mathfrak{M}}$, тј. да за произвољно $B \in \mathfrak{M}$ за које је $\mu(B) < +\infty$ важи да $E \cap B \in \mathfrak{M}$. Како је $B \in \mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$, то је $\overline{\mu}(B) = \mu(B) < +\infty$, па по претпоставци знамо да $E \cap B \in \overline{\mathfrak{M}}$. Даље, како је $\mu(B) < +\infty$, то је $(E \cap B) \cap B \in \mathfrak{M}$ (ово је из дефиниције $\overline{\mathfrak{M}}$). Но, $(E \cap B) \cap B = E \cap B$, па смо показали да $E \cap B \in \mathfrak{M}$, што је и био циљ.

2. Користићемо идеју апроксимације простим функцијама и теорему о монотоној конвергенцији.

Слично апроксимацији простим функцијама, уочимо низ $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_k}(x)$, где је

$A_k = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right)$. Тада је s_n монотоно растући низ функција (по n) и важи да $s_n(x) \to f(x)$ за све $x \in X$. Из теореме о монотоној конвергенцији следи тражено:

$$\int\limits_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X s_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \left(\frac{k-1}{2^n}\right) \mu\left(\left\{x \in X \mid \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n}\right\}\right),$$

при чему је у другој једнакости коришћена дефиниција интеграла.

3. Да бисмо применили Левијев став треба показати да $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx$ конвергира, при чему је $f_n(x) = \frac{\cos nx}{ne^{nx}}$. Важи $|f_n(x)| \leq \frac{1}{ne^{nx}}$ ($|\cos(nx)| \leqslant 1$) па је на основу првог поредбеног критеријума за несвојствене интеграле $\int\limits_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{ne^{nx}}\, dx$. У интегралу са десне стране уводимо смену $nx = t$ па је $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{ne^{nx}}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{n^2 e^t}\, dt = \frac{1}{n^2}$. Пошто $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира (ова сума је $\frac{\pi^2}{6}$) онда и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx$ конвергира. Израчунајмо тражени интеграл. На основу Левијевог става важи $\int\limits_0^{+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$. Интеграл на десној страни ћемо решити уз помоћ смене $nx = t$ и парцијалне интеграције.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos nx}{ne^{nx}} dx = \frac{1}{n^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos t}{e^t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u(t) = e^{-t} \\ v(t) = \sin t \end{array} \right\} = \frac{1}{n^2} \int\limits_0^{\infty} \sin t e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u(t) = e^{-t} \\ v(t) = -\cos t \end{array} \right\} = \frac{1}{n^2}(1 - I),$$

при чему је $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos t}{e^t} dt$. Дакле $I = 1 - I$ тј. $I = 1/2$ и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos nx}{ne^{nx}} dx = \frac{1}{2n^2}$. Следи

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos nx}{ne^{nx}}\, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4. Урадићемо прво случај $\alpha = 0$. Тада је $f_n(x) = \chi_{[1,2]}(x)$, дакле константан низ. Константан низ конвергира ка истој тој константи за сваку дефиницију конвергенције а), б) и в).

   Нека је $\alpha > 0$.

   а) Важи $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Дакле f_n конвергира ка функцији $f = 0$ свуда, па и μ-скоро свуда.

   б) Прво приметимо да важи $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ за све $n \in \mathbb{N}$, јер је $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = n^\alpha < \infty$ па има смисла говорити о конвергенцији у L^1 норми. Пошто важи $\int\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x) - 0|dx = n^\alpha \to \infty$ следи да низ f_n не конвергира у L^1 норми.

   в) Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Скуп свих $x \in \mathbb{R}$ где је $|f_n(x) - 0| > \epsilon$ је или празан (ако је $\epsilon \geq 1$) или $[n^\alpha, 2n^\alpha]$ ако је $\epsilon < 1$. Дакле, тај скуп је највише мере n^α. Пошто је $\alpha > 0$ онда је лимес низа мера ∞, па не важи конвергенција по мери.

   Нека је на крају $\alpha < 0$.

   а) Најпре је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\{0\}}(x)$ (тачка по тачка). Дакле f_n ковергира μ-скоро свуда ка функцији $f \equiv 0$, јер се $\chi_{\{0\}}(x)$ и нула функција разликују само у једној тачки (у $x = 0$) што је скуп Лебегове мере 0.

б) Опет приметимо да важи $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ за све $n \in \mathbb{N}$, јер је $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = n^\alpha < \infty$ па има смисла говорити о о конвергенцији у L^1 норми. Једини кандидат јесте функција $f \equiv 0$, па треба израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\, dx = n^\alpha \to 0$ кад $n \to \infty$, па $f_n \to 0$ у L^1 норми.

в) Из конвергенције у L^1 норми следи конвергенција у мери, па закључујемо да $f_n \to 0$ по мери μ.