Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Л смер) - испитни рок јун 2
2.7.2021.

1. а) [4] Нека су дати скупови $X = (0, +\infty)$ и $A = (0, 3]$ и $B = (1, 7]$. Одредити σ-алгебру $\mathfrak{M}$ над скупом X генерисану скуповима A и B.

   б) [4] Нека је дата функција $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty)$ са $\mu(E) = \begin{cases} +\infty, \ 2 \in E \\ 10, \ 1 \in E \text{ и } 2 \notin E \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$. Доказати да је μ мера на $(X, \mathfrak{M})$.

   в) [4] Да ли је μ комплетна мера?

   г) [4] Дате су функције $f_1(x) = \operatorname{arctg} x$, $f_2(x) = -3\chi_{(0,1]}(x) + 7\chi_{(3,7]}(x)$ и $f_3(x) = 4 - 2f_2(x)$. Које од наведених функција су $\mathfrak{M}$-мерљиве?

   д) [4] За оне функције f_i које су мерљиве, израчунати $\int\limits_{(0,+\infty)} f_i(x) d\mu(x)$, где је μ мера из дела б).

2. [14] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{(\sqrt{n}+x)e^x}{1+n^2x^4}\, dx$.

3. а) [8] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Нека је дата функција $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ таква да $f \in L^1(X) \cap L^\infty(X)$. Доказати да $f \in L^p(X)$ за све $p \in [1, +\infty]$.

   б) [8] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $p, q \in [1, +\infty]$ такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Нека су дати низови функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ и $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q(X)$ такви да $f_n \xrightarrow{L^p} f$ и $g_n \xrightarrow{L^q} g$. Доказати да онда $f_n g_n \xrightarrow{L^1} fg$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења

1. а) Знамо да уколико су $A, B \in \mathfrak{M}$, тада су и $A^c, B^c, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A \in \mathfrak{M}$. Наравно $\emptyset \in \mathfrak{M}$ и $(0,+\infty) \in \mathfrak{M}$. Дакле, $A\setminus B = (0,1] \in \mathfrak{M}$, затим $A\cap B = (1,3] \in \mathfrak{M}$ и $B\setminus A = (3,7] \in \mathfrak{M}$ и $B^c = (7,+\infty) \in \mathfrak{M}$. Заправо су ова четири скуп 'цигле' за све елементе σ-алгебре. Сви елементи σ-алгебре $\mathfrak{M}$ су (има их укупно 16) $\mathfrak{M} = \{\emptyset, (0,1], (1,+\infty), (1,3], (0,1]\cup(3,+\infty), (3,7], (0,3]\cup(7,+\infty), (0,7], (7,+\infty), (0,3], (3,+\infty), (0,1]\cup(3,7], (1,3]\cup(7,+\infty), (1,7], (0,1]\cup(7,+\infty), (0,+\infty)\}$.

   б) Најпре, $\mu(\emptyset) = 0$ јер $1 \notin \emptyset$ и $2 \notin \emptyset$. Треба проверити да ли је $\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mu(E_n)$. Ако постоји n_0 тако да $2 \in E_{n_0}$, онда су обе стране $+\infty$ јер 2 припада и унији. Ако за све $n\in\mathbb{N}$, $2\notin E_n$, онда гледамо да ли 1 припада неком E_n. Ако постоји E_{n_1} такав да $1 \in E_{n_1}$, онда из дисјунктности знамо да $1 \notin E_n$ и $2 \notin E_n$ за све $n \neq n_1$. Дакле, тада су обе стране једнакости једнаке 10. На крају, ако ни 1 ни 2 не припадају ниједном E_n, онда су обе стране једнаке 0, па смо доказали да је μ мера.

   в) Узмимо произвољан скуп $E \in \mathfrak{M}$ такав да је $\mu(E) = 0$ и $F \subseteq E$. Треба видети да ли је скуп $F \in \mathfrak{M}$. Једини скупови мере нула су $\emptyset, (3,+\infty), (7,+\infty)$ и $(3,7]$. Но, ако узмемо скуп $F = (4,6) \subset X$ и за $E = (3,7]$, онда је $F \subset E$, а $F \notin \mathfrak{M}$, па μ није комплетна мера.

   г) f_1 није мерљива јер је нпр. скуп $\{x \in (0,+\infty) \mid \operatorname{arctg} x \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\} = \left(0, \frac{\pi}{6}\right] \notin \mathfrak{M}$. Функција f_2 јесте мерљива, јер $(0,1] \in \mathfrak{M}$ и $(3,7] \in \mathfrak{M}$ па су онда $\chi_{(0,1]}(x)$ и $\chi_{(3,7]}(x)$ мерљиве, а константа пута мерљива, односно збир две мерљиве је мерљива функција. На крају, и f_3 јесте мерљива јер је константна функција $g(x) = 4$ мерљива, а мерљива је и $f_2(x)$, па и $2f_2(x)$, а f_3 је онда разлика две мерљиве.

   д) По дефиницији $\int\limits_{(0,+\infty)} f_2(x)d\mu(x) = -3\mu((0,1]) + 7\mu((3,7]) = -3\cdot 10 + 7\cdot 0 = -30$, при чему смо искористили да се ради о простој (додуше, делом и негативној) функцији и дефиницију мере μ. Даље је

$$\int\limits_{(0,+\infty)} f_3(x)d\mu(x) = 4\int\limits_{(0,+\infty)} 1 d\mu(x) - 2\int\limits_{(0,+\infty)} f_2(x)d\mu(x) = +\infty,$$

   јер је $\mu(0,+\infty) = +\infty$ $(2 \in (0,+\infty))$.

2. Уведимо смену $nx^2 = t$ (слично је рађено на везбама). Тада добијамо да је новодобијени лимес

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n \frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{\frac{t}{n}}\right)e^{\sqrt{\frac{t}{n}}}}{1+t^2}\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\chi_{[0,n]}(t)\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{\frac{t}{n}}\right)e^{\sqrt{\frac{t}{n}}}}{1+t^2}\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{n}}.$$

Интеграбилну доминанту сада лако налазимо јер је

$$\frac{\chi_{[0,n]}(t)\left(\sqrt{n}+\sqrt{\frac{t}{n}}\right)e^{\sqrt{\frac{t}{n}}}}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{(\sqrt{n}+1)e}{2\sqrt{n}} \leqslant e,$$

па је функција $g(t) = \frac{e}{(1+t^2)\sqrt{t}}$ интеграбилна доминанта (око 0 се понаша као $\frac{c}{\sqrt{t}}$, а око $+\infty$ као $\frac{c}{t^2\sqrt{t}}$). Дакле, по ТДК можемо ући лимесом под интеграл и добијамо да је

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\chi_{[0,n]}(t)\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{\frac{t}{n}}\right)e^{\sqrt{\frac{t}{n}}}}{1+t^2}\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{n}} &= \int\limits_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\chi_{[0,n]}(t)\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{\frac{t}{n}}\right)e^{\sqrt{\frac{t}{n}}}}{1+t^2}\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{n}}\\ &= \int\limits_0^{+\infty}\frac{(\sqrt{n}+0)\,e^{\sqrt{0}}}{1+t^2}\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{n}}\\ &= \int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{2\sqrt{t}(1+t^2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},\end{aligned}$$

при чему се послењи интеграл сменом $\sqrt{t} = u$ своди на интеграл рационалне функције. Запитајте се да ли почетна функција има интегабилну доминанту.

3. а) За $p = 1$ и $p = +\infty$ тврђење тривијално важи по претпоставци. Узмимо $p \in (1, +\infty)$. Тада је

$$\int\limits_X |f|^p \, d\mu = \int\limits_X |f|^{p-1}|f| \, d\mu \leqslant \|f\|_\infty^{p-1} \int\limits_X |f| \, d\mu = \|f\|_\infty^{p-1}\|f\|_1 \leqslant \infty,$$

па $f \in L^p(X, \mu)$, при чему неједнакост важи јер је $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ μ скоро свуда што нам је овде довољно.

б) Посматрајмо

$$\begin{aligned}
\|f_n g_n - fg\|_1 &= \int\limits_X |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \, dx \\
&= \int\limits_X |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \, dx \\
&\leqslant \int\limits_X |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x)| \, dx + \int\limits_X |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \, dx \\
&= \int\limits_X |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| \, dx + \int\limits_X |f_n(x) - f(x)||g(x)| \, dx \\
&\leqslant \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q,
\end{aligned}$$

при чему смо у првој неједнакости искористили неједнакост троугла, а у другој Хелдерову неједнакост са коефицијентима p и q. Пуштањем $\lim\limits_{n\to\infty}$, уз чињеницу да $f_n \in L^p$ (по претпоставци) и $g \in L^q$ (ово следи из особине норме, тј. неједнакости Минковског $\|g\|_q = \|g - g_n + g_n\|_q \leqslant \|g - g_n\|_q + \|g_n\|_q < \infty$) добијамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n g_n - fg\|_1 = 0$, што је и требало доказати.