Задатак са p-адском метриком

Задатак: Нека је $p \in \mathbb{N}$ прост број. Запишимо рационалан број $q \in \mathbb{Q}$ као $q = p^k \cdot \frac{m}{n}$, за $m, n \in \mathbb{Z}$ тако да важи $p \nmid m$ и $p \nmid n$. Дефинишимо функцију $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ као $|q|_p = p^{-k}$, где је k добијено од q како је описано горе. Дефинишемо $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ као

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ |x - y|_p, & x \neq y \end{cases}.$$

Доказати да је $(\mathbb{Q}, d_p)$ један (ултра)метрички простор.

Решење: Својства (1), (2) и (3) следе директно по дефиницији пресликавања.
Остаје још да докажемо ултраметричку неједнакост. За произвољне рационалне бројеве x, y, z треба показати $d_p(x, z) \leqslant \max\{d_p(x, y), d_p(y, z)\}$. Ако су неки од x, y, z међусобно једнаки, неједнакост је тривијално задовољена. Стога, нека су сви различити и запишимо

$$x - y = p^\beta \cdot \frac{b_1}{b_2} \quad \text{и} \quad y - z = p^\gamma \cdot \frac{c_1}{c_2},$$

где ниједан од целих бројева b_1, b_2, c_1, c_2 није дељив са p. Нека је без умањења општости $\beta \leqslant \gamma$. Тада је јасно да је десна страна у неједнакости једнака са $\max\{p^{-\beta}, p^{-\gamma}\} = p^{-\beta}$. Остаје да видимо шта је $d_p(x, z)$.
Уочимо да важи

$$x - z = (x - y) + (y - z) = p^\beta \left(\frac{b_1}{b_2} + p^{\gamma - \beta} \frac{c_1}{c_2} \right) = p^\beta \cdot \frac{b_1 c_2 + p^{\gamma - \beta} c_1 b_2}{b_2 c_2}.$$

1° $\beta < \gamma$
   У овом случају из истих разлога које смо дискутовали на вежбама ни именилац ни бројилац од разломка у последњем изразу нису дељиви са p. Тако да је $d_p(x, z) = p^{-\beta}$.

2° $\beta = \gamma$
   У овом случају именилац такође није дељив са p. Међутим, у бројиоцу се може појавити p као неки фактор. Стога је степен простог броја који се извлачи из $x - z$ једнак барем β. Одатле је $d_p(x, z) \leqslant p^{-\beta}$.

У оба случаја је

$$d_p(x, z) \leqslant p^{-\beta} = \max\{d_p(x, y), d_p(y, z)\},$$

па је наведени простор (ултра)метрички.