Dpja resenja februar

① $D = ?$ $\quad \cos z = 0 \iff e^{iz}+e^{-iz}=0 \iff e^{2iz}+1=0 \iff e^{2iz}=e^{i\pi}$

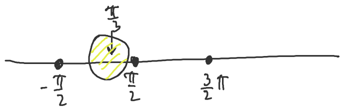
$\iff 2iz = i\pi + 2ik\pi, \ k\in\mathbb{Z} \iff z = \frac{\pi}{2}+k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$

$$D = \{ z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \notin \pi\cdot(\mathbb{Z}+\tfrac{1}{2}) \}$$

а) Област $B(\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{C}$

$\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2} < \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6} \iff \pi > 3$

онда је $B(\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}) \subseteq D$, па је $\tan(z)$ аналитичка на D.

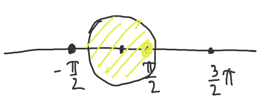


Следи да је $u = \mathrm{Re}(\tan(z))$ хармонијска на $B(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$, па важи својство ср. вр., тј.

$$\int_0^{2\pi} u\left(\frac{\pi}{3}+\frac{e^{it}}{2}\right)dt = 2\pi\cdot u\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\pi\cdot\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\pi$$

б) Како је домен од u такође D, следи да u није добро дефинисана на $B(\frac{\pi}{3};1)$, па ни хармонијска, и не може се применити св. ср. вредности.

$\frac{\pi}{3}+1 > \frac{\pi}{2} \iff 1 > \frac{\pi}{6}$ (T)



② $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = \cos(2x+y)$

$\Delta = (-2)^2 - 1\cdot 4 = 0$ параболичка

$\partial_x - 2\partial_y = 0 \Rightarrow \xi(x,y) = y+2x$

$\eta(x,y) = x$

Канонска форма: $v_{\eta\eta} = \cos\xi \Rightarrow v(\xi,\eta) = \frac{\eta^2}{2}\cos\xi + \eta\,\varphi(\xi) + \psi(\xi)$

$\rightsquigarrow u(x,y) = \frac{x^2}{2}\cos(2x+y) + x\,\varphi(2x+y) + \psi(2x+y), \quad \varphi,\psi\in C^2(\mathbb{R})$

из услова следи: $x\varphi(x)+\psi(x)=0$

$2x\varphi'(x)+\varphi(x)+2\psi'(x) = -x$

$\Rightarrow \varphi(x) = x, \quad \psi(x) = -x^2$

③ За јединственост: u_1, u_2 - решења

$u = u_1 - u_2$: $\quad u_t = u_{xx}$, $\ u(x,0)=0$, $\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\,dx$$

$$E'(t) = \int_0^\pi u\cdot u_t\,dx = \int_0^\pi u u_{xx}\,dx = \underbrace{u u_x\Big|_{x=0}^{x=\pi}}_{0} - \int_0^\pi u_x^2\,dx$$

$\Rightarrow E'(t)\le 0 \Rightarrow E(t)\searrow$ и $E(t)\ge 0$

$E(0)=0 \Rightarrow E(t)\equiv 0 \Rightarrow u_1\equiv u_2$

Решење хомогеног проблема: $u\equiv 0$, али тражимо сопствене фје

$u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda$

$X'(0)=X'(\pi)=0$

добија се: $X(x) = c\cdot\cos(kx)$, $\ \lambda = k^2, \ k\ge 0$

$T(t) = c\cdot e^{-k^2t}$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^\infty c_k\cdot e^{-k^2t}\cdot\cos(kx)$$

Нехомогени део: $u(x,t) = \sum_{k=0}^\infty T_k(t)\cdot\cos(kx)$

$$tx^2 = t\cdot\left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)\right)$$

$\Rightarrow T_k' = T_k\cdot(-k^2) + t\cdot\frac{(-1)^k}{k^2}, \ k\ne 0 \qquad k=0: T_k' = t\frac{\pi^2}{3}$

$T_k(0)=0, \ \forall k\in\mathbb{N}_0$

$T_0(t) = \frac{\pi^2}{6}t^2, \quad \underset{k\ge 1}{T_k(t)} = \frac{4(-1)^k}{k^4}\cdot\left(\frac{e^{-k^2t}}{k^2}+t-\frac{1}{k^2}\right)$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\pi^2}{6}t^2 + \sum_{k=1}^\infty \frac{4(-1)^k}{k^4}\cdot\left(\frac{1}{k^2}e^{-k^2t}+t-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\cos(kx)$$

+ провера да задовољава!