

Свезана двотачка - (путна) повезаност

Тополошки простор задат као $(\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\})$ се назива свезана двотачка. То је једини (до на тополошки изоморфизам) двоелементни нетривијални (односно, онај који није дискретан) тополошки простор. На вежбама сам рекао да је он повезан, али није путно повезан. То није тачно. Он јесте повезан, али је такође и путно повезан. У наставку су кратки докази ових чињеница.

- *повезаност*: Једина могућа дисконекција овог простора би морала да буде облика $U = \{0\}$ и $V = \{1\}$, да би се испоштовала и дисјунктност и непразност и $U \cup V = \{0, 1\}$. Међутим, V није отворен скуп у овој топологији, тако да закључујемо да дисконекција не постоји, па је простор повезан.
- *путна повезаност*: Једино треба показати да су 0 и 1 повезани путем. Нека је пресликавање $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ дато са

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{за } 0 \leq t < 1/2 \\ 1, & \text{за } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Јасно је да је $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(1) = 1$. Још треба видети зашто је γ непрекидно. Желимо да је инверзна слика сваког отвореног скупа свезане двотачке отворен скуп у $([0, 1], |\cdot|)$. Рачунамо редом: $\gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\gamma^{-1}(\{0\}) = [0, 1/2) = [0, 1] \cap (-1/2, 1/2)$, $\gamma^{-1}(\{0, 1\}) = [0, 1] = [0, 1] \cap (-1, 2)$. Јасно је да су сва три добијена скупа отворена у потпростору $[0, 1]$ од \mathbb{R} , па закључујемо да је γ непрекидно.

Напомена 1: Испоставља се да не постоји (мени познат) лаган (за који се лако види) пример метричког простора који је повезан, а није путно повезан. Најпознатији смо споменули на часу: тополошка синусоида. Погледајте рецимо [овде](#) још неке примере.

Напомена 2: Тополошки простор $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{cf})$, тј. скуп природних бројева опремљен кофинитном топологијом је такође пример повезаног скупа који није путно повезан. Али ни ово није баш пример у коме се то види лако. За дефиницију кофинитне топологије погледајте тачку (52) у првој глави професорове скрипте.