Скице решења са писменог испита из анализе 2

из рока септембар 1 за МНВ смерове, одржаног 07.09.2019.

асистенти: Филип Броћић, Душан Дробњак

1. Задата је функција $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ са

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|, & x_1 \neq x_2 \\ |y_1 - y_2|, & x_1 = x_2 \end{cases}.$$

(а) Доказати да је $(\mathbb{R}^2, d)$ метрички простор.

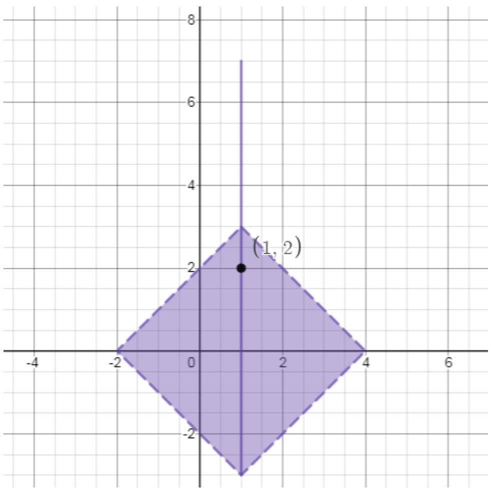
(б) У зависности од позитивних реалних бројева p и r описати (скицирати у равни) отворене кугле $B((p, 2); r)$ у овом метричком простору.

(в) Доказати да је $(\mathbb{R}^2, d)$ комплетан.

Решење:

(а) Позитивност, недегенерисаност и симетричност су јасни. Код неједнакости троугла треба раздвојити на неколико случајева у зависности од односа x координара. На пример, ако је $x_1 = x_2 \neq x_3$, онда се $d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \geqslant d(x_1, x_3)$ своди на $|y_1 - y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_2 - x_3| \geqslant |y_1| + |y_3| + |x_2 - x_3|$, односно на $|y_1 - y_2| + |y_2| \geqslant |y_1|$, што јасно важи. Остали случајеви се аналогно проверавају.

(б) Ако је $x = p$ онда захтевамо $|2 - y| < r$, а ако је $x \neq p$ онда захтевамо $|y| + |2| + |x - p| < r$. Прву неједнакост задовољавају тачке $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = p, y \in (2 - r, 2 + r)\}$. За другу неједнакост ако је $r \leqslant 2$, нема тачака које је задовољавају. Ако је пак $r > 2$, онда су то све тачке тако да је $|x - p| + |y| < r - 2$. Ради илустрације, отворена кугла $B((1, 2); 5)$ је дата на слици 1.



Слика 1: Слика 1: Лопта $B((1, 2); 5)$ у равни

(в) Доказаћемо да сваки Кошијев низ конвергира. Нека је (x_n, y_n) Кошијев. Ако је почевши од неког тренутка низ x_n константан, онда можемо гледати само други део дефиниције за метрику. Одатле би следило и да је y_n Кошијев. Пошто смо у $\mathbb{R}$, он је и конвергентан. Одатле следи и да је (x_n, y_n) конвергентан.

Ако се увек дешава да је $x_n \neq x_m$ за довољно велике m и n, онда гледамо прву дефиницију. Тада мора важити да су $|y_n|$ и $|y_m|$ довољно мали, па низ y_n конвергира ка нули. Такође је x_n Кошијев из те дефиниције, па следи да је конвергентан (опет смо у $\mathbb{R}$). Одатле је и (x_n, y_n) конвергентан.

2. Нека је $M_2(\mathbb{R})$ скуп 2×2 матрица са коефицијентима у $\mathbb{R}$. Посматрајмо скуп

$$NSL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1,\ \mathrm{tr}A = 0\}.$$

(а) Наћи $d(E, NSL_2(\mathbb{R}))$ где је E јединична матрица и $d(A, B) = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} |a_{ij} - b_{ij}|^2}$ стандардна метрика на скупу $M_2(\mathbb{R})$.

(б) Доказати да је $NSL_2(\mathbb{R})$ површ у $\mathbb{R}^4$ уз стандардну идентификацију $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$.

(в) Наћи тангентни простор на $NSL_2(\mathbb{R})$ у тачки $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Решење:

(а) Потребно је минимизовати израз $(a-1)^2 + b^2 + c^2 + (d-1)^2$ при условима $ad - bc = 1$ и $a + d = 0$. Оно се може урадити веома лако методом Лагранжевих множилаца. Решење: 2.

(б) Можемо употребити теорему о рангу. Решење ће следити из тога што матрица градијената (за $f_1 = ad - bc - 1$, $f_2 = a + d$) има ранг 2:

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} d & -c & -b & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

тј. градијенти су линеарне независни. Ово следи из тога што не може важити $bc = 0$ (проверити). Други начин је параметризовати $NSL_2(\mathbb{R})$ као, на пример, $\left(a, b, \frac{-a^2-1}{b}, -a\right)$ (треба водити рачуна у којим су скуповима a и b). Овде би требало проверити да су парцијални изводи по a и по b линеарно независни у свакој тачки.

(в) Један начин да се ово уради је да се нађу сви вектори из $\mathbb{R}^4$ који су нормални на оба градијента. Други начин је наставак решења дела под (б) са параметризацијом. Тангентни простор ће у свакој тачки бити разапнут са два вектора који су парцијални изводи по a и b од параметризације. Конкретно су то $\left(1, 0, \frac{a^2+1}{b^2}, -1\right)$ и $\left(0, 1, \frac{-2a}{b}, 0\right)$. Рачунати у тачки из задатка (добија се за $a = 0$ и $b = 1$) су у питању вектори $(1, 0, 1, -1)$ и $(0, 1, 0, 0)$. Дакле, у питању је раван $x \cdot (1, 0, 1, -1) + y \cdot (0, 1, 0, 0) + (0, 1, -1, 0) = (x, y + 1, x - 1, -x)$, $x, y \in \mathbb{R}$, смештена у $\mathbb{R}^4$.

Било како било, мора се добити линеарни (или афини) потпростор димензије 2.

3. (а) Означимо са $\vec{r} = (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$ вектор положаја у односу на тачку (x_0, y_0, z_0) у $\mathbb{R}^3$ и са $\|\cdot\|$ еуклидску норму на $\mathbb{R}^3$. За функцију $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\} \to \mathbb{R}$ дату са

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\|\vec{r}\|}$$

уочимо векторско поље $\vec{F} = -\nabla f$. Нека је Σ сфера са центром у (x_0, y_0, z_0) полупречника $\varepsilon > 0$, оријентисана тако да вектор нормале показује ка унутра. Израчунати

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot dS.$$

(б) Дато је n различитих тачака $P_1, \ldots, P_n$ у $\mathbb{R}^3$ и n вредности $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}$. Посматрајмо функцију $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{P_1, ..., P_n\} \to \mathbb{R}$ дату са

$$\varphi(P) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\|\overrightarrow{PP_j}\|}.$$

Доказати да важи

$$\iint_\mathcal{S} -\nabla\varphi \cdot dS = 4\pi \sum_{j=1}^{n} q_j,$$

где је $\mathcal{S}$ произвољна затворена оријентисана глатка површ, чија унутрашњост садржи све тачке P_j, а интеграли се по спољашњој страни површи $\mathcal{S}$. Овиме је доказан *Гаусов закон* где q_j означавају наелектрисања сконцентрисана у тачкама P_j, функција φ је електростатички потенцијал, а $\vec{E} = -\nabla\varphi$ је електрично поље.

Решење:

(а) У координатном запису је

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Можемо израчунати

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x_0 - x}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0))^{3/2}},$$

па је одатле $\vec{F} = -\nabla f = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$.

Површ по којој интегралимо је сфера. Пазећи на оријентацију, можемо писати да је јединични вектор нормале $\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$. Сада важи

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot dS = \iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_\Sigma -\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}\cdot\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\,dS = \iint_\Sigma -\frac{1}{\|\vec{r}\|^2}\,dS = -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_\Sigma dS = -\frac{P(\Sigma)}{\varepsilon^2} = -4\pi.$$

Пошто смо интегралили по сфери полупречника ε, онда је $\|\vec{r}\|^2 = \varepsilon^2$, а $P(\Sigma) = 4\varepsilon^2\pi$ је површина сфере.

(б) Користићемо се делом под (а). Око сваке тачке P_j опишимо лопту Σ_j довољно малог полупречника тако да се цела налази унутар површи $\mathcal{S}$. Дивергенција електричног поља $\vec{E} = -\nabla\varphi$ је нула (или еквивалентно, 2-форма добијена од векторског поља $\vec{E}$ је затворена):

$$\text{div}\vec{E} = \sum_{j=1}^n q_j \text{div}\left(\frac{\overrightarrow{PP_j}}{\|\overrightarrow{PP_j}\|^3}\right) = \sum_{j=1}^n q_j\cdot 0 = 0.$$

Ово се проверава директним рачуном. Одатле, по теореми Гауса Остроградског примењеној на површ $\mathcal{S}' = \mathcal{S}\cup\bigcup\limits_{j=1}^n \Sigma_j$ важи:

$$\iiint\limits_T 0\,dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot dS + \sum_{j=1}^n \iint\limits_{\Sigma_j} \vec{E}\cdot dS,$$

где је тело T ограничено са $\mathcal{S}'$, а оријентација у интегралима под сумом је као у делу под (а). Одатле је директно по делу под (а):

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot dS = -\sum_{j=1}^n \iint\limits_{\Sigma_j} \vec{E}\cdot dS = -\sum_{j=1}^n q_j\cdot(-4\pi) = 4\pi\sum_{j=1}^n q_j.$$

4. Дата је функција $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{arctg}(nx)}{n^2+x^2}$.

(а) Одредити домен и испитати непрекидност функције f на њеном домену.

(б) Испитати диференцијабилност функције f.

Решење:

(а) Ред конвергира обично за било које фиксирано $x\in\mathbb{R}$. То значи да је домен цело $\mathbb{R}$. Важи да је $\left|\frac{\text{arctg}(nx)}{n^2+x^2}\right| \leqslant \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$. Одатле следи и да је f непрекидна на целом домену (јер ред равномерно конвергира по Вајерштрасу).

(б) Општи члан реда је диференцијабилна функција. Ред конвергира обично за било које фиксирано $x\in\mathbb{R}$. Још би требало испитати равномерну конвергенцију реда са општим чланом $f_n'(x)$. Функција је непарна, па можемо гледати само тачке $x\in[0,\infty)$. Извод је

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = \frac{n(n^2+x^2) - 2x(1+n^2x^2)\text{arctg}(nx)}{(1+n^2x^2)(n^2+x^2)^2}.$$

За произвољно $l>0$ и $x\in[l,\infty)$ имамо

$$\left|\frac{n(n^2+x^2) - 2x(1+n^2x^2)\text{arctg}(nx)}{(1+n^2x^2)(n^2+x^2)^2}\right| \leqslant \left|\frac{n}{(1+n^2x^2)(n^2+x^2)}\right| + \left|\frac{2x\text{arctg}(nx)}{(n^2+x^2)^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^3l^2} + \frac{\pi}{2n^3},$$

па овај ред равномерно конвергира. Закључујемо да је f диференцијабилна за све $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Доказаћмо да није диференцијабилна у нули. По дефиницији је

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(hn)}{h(n^2+h^2)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\lim_{h\to 0}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(hn)}{h(n^2+h^2)}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

Ово важи за неко $N\in\mathbb{N}$. Лимесом смо прошли кроз коначну суму. Пошто харминијски ред дивергира, за произвољно $M>0$ можемо изабрати довољно велико N тако да важи $f'(0)\geqslant\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\geqslant M$. Одавде следи да лимес не постоји, па функција није диференцијабилна у нули.