Скице решења за писменог испита из анализе 2
из рока јун 1 за МНВ смерове, одржаног 18.06.2019.

1. Нека је (M, d) метрички простор. За две тачке $x, y \in M$ и $\varepsilon > 0$ кажемо да су повезане ε-ланцем ако постоји коначан скуп тачака $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ у M таквих да важи $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$, за $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ако су за свако $\varepsilon > 0$ сваке две тачке из M повезане ε-ланцем кажемо да M задовољава услов ε-ланца.

   (а) За дате $x \in M$ и $\varepsilon > 0$ уведимо скуп $P_{x,\varepsilon} = \{y \in M \mid x \text{ и } y \text{ су повезане } \varepsilon\text{-ланцем}\}$. Доказати да је $P_{x,\varepsilon}$ и отворен и затворен у M.

   (б) Ако је M повезан метрички простор доказати да он задовољава услов ε-ланца.

   (в) Дати пример метричког простора који задовољава услов ε-ланца, али није повезан.

   (г) Доказати да ако је M компактан и задовољава услов ε-ланца, онда је и повезан.

   Решење.

   (а) За отвореност скупа $P_{x,\varepsilon}$ довољно је по дефиницији доказати да за његову произвољну тачку y важи $B(y; \varepsilon) \subset P_{x,\varepsilon}$. Ово је јасно јер ако су x и y повезане $\varepsilon-$ланцем дужине n, онда за произвољну тачку $z \in B(y; \varepsilon)$ важи $d(y, z) < \varepsilon$, па су x и z повезане ланцем дужине $n + 1$.

   Што се затворености тиче, један од начина је карактеризацијом преко лимеса. Нека је t_n низ у $P_{x,\varepsilon}$ који конвергира ка t. Почевши од неког n_0 важи $d(t_n, t) < \varepsilon$. Пошто постоји ланац од x до t_{n_0} и $d(t_{n_0}, t) < \varepsilon$, онда и $t \in P_{x,\varepsilon}$, па имамо и затвореност.

   (б) M је повезан, па су једини скупови који су уједно и отворени и затворени празан и цео простор. Како је $P_{x,\varepsilon}$ непразан, онда је $P_{x,\varepsilon} = M$, па следи тврђење.

   (в) На пример $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

   (г) Претпоставимо да M није повезан и нека је U, V једна његова дисконексија. Онда су скупови U и V затворени, а из компактности M следи и да су компактни. Два компактна дисјунктна скупа су на ненула растојању, тако да за неко ε мање од тог растојања важи да M не задовољава услов $\varepsilon-$ланца. То је контрадикција, па M мора бити повезан.

2. Нека је $\mathcal{P}_3$ векторски простор полинома са реалним коефицијентима степена највише 3. Норму на $\mathcal{P}_3$ задајемо са $\|a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, а метрика d је индукована овом нормом.

   (а) За $a \in \mathbb{R}$ доказати да је функција $ev_a : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ дата са $ev_a(p) = p(a)$ диференцијабилна.

   (б) Нека је $f : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ дата са

   $$f(p) = (p(0) - 1)^2 + (p'(0) - 2)^2 + \frac{1}{4}(p''(0) - 6)^2.$$

   Испитати диференцијабилност функције f.

   (в) Нека је $q \in \mathcal{P}_3$ полином дат са $q(x) = x^3 + 1$. Наћи растојање $d(q, f^{-1}(\{117\}))$.

   Решење.

   (а) Пресликавање ev_a је линеарно пресликавање између коначнодимензионих нормираних векторских простора. Следи да је диференцијабилно и да му је извод оно само, тј. да важи $D_{ev_a}(p)(h) = ev_a(h) = h(a)$. Ако ово није довољно јасно, уверите се да важи

   $$\lim_{h \to 0} \frac{|ev_a(p + h) - ev_a(p) - D_{ev_a}(p)(h)|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{|ev_a(p) + ev_a(h) - ev_a(p) - ev_a(h)|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{|0|}{\|h\|} = 0,$$

   па ово заиста јесте извод.

   (б) Диференцирање је такође линеарно пресликавање која слика $\mathcal{P}_3$ у $\mathcal{P}_3$. Следи да је и оно диференцијабилно. И за диференцирање два пута исто ово важи. Приметите да је f композиција следећих пресликавања (у одговарајућем редоследу): сабирања, квадрирања, одузимања, диференцирања, два пута диференцирања, ev_0. Она су сва диференцијабилна у свим тачкама, па је и f диференцијабилно.

   (в) Проблем се своди на минимизовање функције $(x-1)^2 + y^2 + z^2 + (t-1)^2$ при услову $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 117$. Ово се може урадити методом Лагранжевих множилаца.

   Једна од олакшица је схватити одмах да мора бити $t = 1$. А такође се онда може приметити да тражимо минимално растојање тачке од сфере, и веома лако се може добити да оно износи $2\sqrt{13}$.

3. Дата је област

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} + \frac{(z-1)^2}{36} < 3 \right\}$$

и форма $\alpha = (x^2 - 4x + (x-2)^6 + yx^2)\, dydz - 2xyz\, dxdy$. Нека је $S = \partial V$, оријентисана тако да вектор нормале показује напоље.

(а) Испитати тачност и затвореност форме α.

(б) Израчунати $\iint\limits_S \alpha$.

Решење.

(а) $d\alpha = (2x - 4 + 6(x-2)^5) dx \wedge dy \wedge dz$, како је $d\alpha \neq 0$ на сваком отвореном подскупу од $\mathbb{R}^3$ форма није затворена. А како је свака тачна форма затворена α не може бити тачна.

(б) Интеграл је могуће директно израчунати параметризацијом уз доста пажљивог и напорног рачуна. Други начин је да се примени формула Гаус-Остроградски (последица опште Стоксове теореме) уз напомену да су оријентације сагласне.

$$\iint\limits_{\partial V} \alpha = \iiint\limits_{V} d\alpha = \iiint\limits_{V} (2(x-2) + 6(x-2)^5) dxdydz = 0.$$

Последња једнакост важи јер се увођењем смене

$$\begin{aligned} x &= u + 2 \\ y &= v \\ z &= t \end{aligned}$$

интеграл своди након примене Фубинијеве теореме на

$$\iint\limits_{\frac{(v+2)^2}{25} + \frac{(t-1)^2}{36} < 3} \int_{-\sqrt{3 - \frac{(v+2)^2}{25} + \frac{(t-1)^2}{36}}}^{\sqrt{3 - \frac{(v+2)^2}{25} + \frac{(t-1)^2}{36}}} (2u + 6u^5) dudvdt = \iint\limits_{\frac{(v+2)^2}{25} + \frac{(t-1)^2}{36} < 3} 0 \; dvdt = 0.$$

4. (а) Нека је $x \geq 1$. Доказати да је

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{1}{x^{2n-1}},$$

а потом израчунати интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^n}.$$

(б) Нека интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(y,x) dy$ равномерно конвергира на $[a, +\infty)$ и нека је $\lim\limits_{x \to +\infty} f(y,x)$ равномеран на $[0, b]$ за свако $b > 0$. Доказати да је

$$\lim_{x \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} f(y,x)\, dy = \int\limits_0^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f(y,x)\, dy.$$

(в) Израчунати

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^n}.$$

(г) Доказати *Валисову* формулу

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Решење.

(а) Приметимо да је $\int_0^{+\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2x}$. Интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}=\int_0^{+\infty}\frac{-2nxdy}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

равномерно конвергира по Вајерштрасу на сваком сегменту $[1,M]$ јер је $\frac{2nx}{(x^2+y^2)^{n+1}}\leq\frac{2nM}{(1+y^2)^{n+1}}$, такође почетни интеграл конвергира за свако $x\geq 1$. Како је парцијални извод и непрекидан можемо диференцирати под знаком интеграла и важи

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{n+1}}=\frac{-1}{2nx}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}. \quad (\heartsuit)$$

Доказ ћемо извести индукцијом, за $n=2$ важи

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{x^3}.$$

Претпоставимо да формула важи за $n-1$ и докажимо да важи за n користећи $(\heartsuit)$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}=\frac{-1}{(2n-2)x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\pi}{2}\frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}\frac{1}{x^{2n-3}}=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{1}{x^{2n-1}}.$$

Заменом $x=\sqrt{n}$ добијамо да је

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}.$$

(б)

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}f(y,x)dy=\lim_{x\to+\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}f(y,x)dy\overset{(1)}{=}\lim_{b\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\int_0^{b}f(y,x)dy=$$
$$\overset{(2)}{=}\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\lim_{x\to+\infty}f(y,x)dy=\int_0^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}f(y,x)dy.$$

Једнакост (1) важи јер интеграл равномерно конвергира по x, а једнакост (2) јер је лимес равномеран по $y\in[0,b]$.

(в) Низ $\left(1+y^2/n\right)^n$ расте ка e^{y^2} за свако $y\geq 0$ односно низ непрекидних $\left(1+y^2/n\right)^{-n}$ функција опада за свако фиксирано y ка непрекидној функцији e^{-y^2} те је по Динијевој теореми тај лимес равномеран на сваком компакту $[0,b]\subset[0,+\infty)$, а онда из (б) закључујемо да је

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(г) Користећи (а) и (в) добијамо

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$