Задаци које нисмо стигли да урадимо

1. Наћи
$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1}-2n\right).$$

Решење: Хтели смо да развијемо $(\sqrt[n]{e}-1)^{-1}$ и видели смо на часу да није довољно да $\sqrt[n]{e}=e^{1/n}$ развијамо до другог степена, па је остало да покушамо са већим. Развој до трећег степена је

$$\begin{aligned}(\sqrt[n]{e}-1)^{-1} &= \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)-1\right)^{-1} = n\cdot\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1} = \\ &= n\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right)\right) = \\ &= n\cdot\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n-\frac{1}{2}+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty.\end{aligned}$$

Сада је

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1} &= (\sqrt[n]{e}+1)(\sqrt[n]{e}-1)^{-1} = \left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(n-\frac{1}{2}+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= 2n-1+\frac{1}{6n}+1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right) = 2n+\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty.\end{aligned}$$

Приметимо да смо прву заграду морали да развијамо до другог реда, тј. $\frac{1}{n^2}$ зато што се у другој појављује члан реда n^1, који помножен са тим даје $\frac{1}{n}$ (које не упада у мало о). Коначно можемо да срачунамо

$$n\cdot\left(\frac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1}-2n\right) = n\cdot\left(2n+\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-2n\right) = \frac{1}{6}+o(1),\ n\to\infty,$$

па је

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1}-2n\right) = \frac{1}{6}.$$

2. Наћи екстремуме, интервале монотоности, превојне тачке и интервале конвексности (конкавности) за функцију
$$f(x) = (x^2+1)\arcsin\frac{2x}{x^2+1}.$$

Решење: Кроз цело решење са $c(x)$ ћемо означити функцију $c:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ дату са

$$c(x) = \operatorname{sgn}(1-x^2) = \begin{cases}-1, & |x|>1\\ 1, & |x|<1\end{cases}.$$

На часу смо израчунали да је први извод (само је овде записан у новој нотацији)

$$f'(x) = 2x\arcsin\frac{2x}{x^2+1}+2c(x),$$

који је дефинисан за $|x| \neq 1$. Нема потребе да испитујемо шта је извод за ове тачке. Схватили смо да на основу првог извода не можемо да нађемо екстремне вредности функције, јер је потребно решити неке нелинеарне једначине, па морамо даље да испитујемо f'. Зато ћемо наћи други извод, а пошто ће се испоставити да је и он незгодан - онда и трећи. Други извод је

$$f''(x) = 2 \arcsin \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4xc(x)}{x^2+1},$$

а трећи је

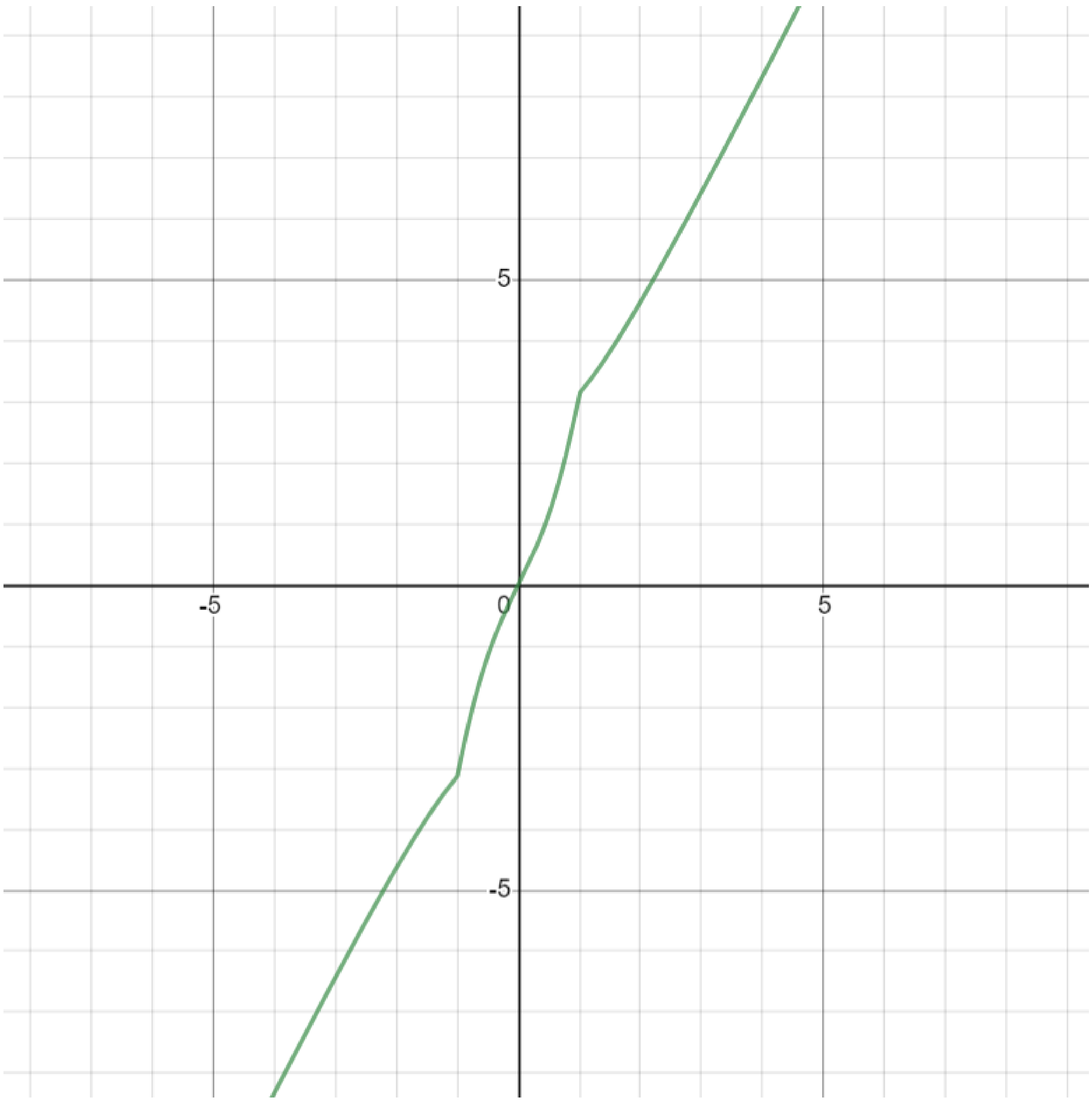
$$f'''(x) = \frac{8c(x)}{(x^2+1)^2}.$$

Посматрајмо сада случајеве.

- $|x| < 1$:
  Ту је $f''' > 0$, па важи да је f'' растућа функција. Како је $f''(0) = 0$, то онда значи да је $f'' < 0$ за $x \in (-1, 0)$ и $f'' > 0$ за $x \in (0, 1)$. Одатле закључујемо да f' опада за $x \in (-1, 0)$ и f' расте за $x \in (0, 1)$. Како је $f'(0) = 2$, то значи да је на целом интервалу $(-1, 1)$ испуњено $f' \geqslant 2 > 0$. Одатле је f растућа за $x \in (-1, 1)$.
- $x > 1$:
  Овде је $f''' < 0$, што значи да f'' опада. Пошто је $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$, следи да је на целом интервалу $f'' > 0$. Одатле следи да је f' растућа функција, а пошто је $f'(1+) = 2\arcsin(2/2) - 2 = \pi - 2 > 0$, следи да је $f' > 0$ на целом интервалу. То значи да је f растућа овде.
- $x < -1$:
  Пошто је функција f непарна, тј. $f(-x) = -f(x)$, то значи да је ситуација у овом случају симетрична са претходним. (Овај аргумент смо могли да применимо и за интервале $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ и могли смо само један од њих да посматрамо уместо оба.)

Закључци су да је f растућа на целом $\mathbb{R}$ и нема локалних екстремума. f је конвексна на интервалима $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$, а конкавна на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$. Превојна тачка је $x = 0$.

Иако се није тражило, ради илустрације је на следећој страни дата скица функције f.


5
-5
0
5
-5