Колоквијум из Анализе 1, 1О1 и 1О4, 30.01.2020.

1. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотон низ реалних бројева такав да је $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_{n+1}-x_n)=x\in\mathbb{R}$.

   (а) Доказати да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен.

   (б) Доказати да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан и наћи његову граничну вредност.

   (в) Доказати да део под (б) важи и без претпоставке о монотоности низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (а) Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилна функција и нека је $x_0\in\mathbb{R}$. Претпоставимо да је $f(x_0)=0$ и $f'(x)>f(x)$ за $x\in[x_0,+\infty)$. Доказати да је $f(x)>0$ за $x>x_0$.

   (б) Доказати да једначина $e^{x-1}=1+x+\frac{x^2}{2}$ има јединствено решење.

3. Нека су $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ непрекидне функције за које важи

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$

   Доказати да постоји $t\in[0,1]$ такво да је

$$(f(t))^{2020}+\sin\left((g(t))^{2020}\right)=(g(t))^{2020}+\sin\left((f(t))^{2020}\right).$$

4. Нека је $B=\{\log(n)-2k\pi \mid n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}_0\}$.

   (а) Показати да је скуп B затворен у односу на операцију $+$.

   (б) Показати да за свако $\varepsilon>0$ постоје $n\in\mathbb{N}$ и $k\in\mathbb{N}_0$ такви да важи $\log(n)-2k\pi\in(0,\varepsilon)$.

   (в) Одредити $\inf B_+^*$, где је $B_+^*=\{b\in B\mid b>0\}$.

   (г) Показати да је скуп B густ у $[0,+\infty)$.

   (д) Показати да је скуп $\{\sin(\ln n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ свуда густ у скупу $[-1,1]$.

Колоквијум из Анализе 1, 1О1 и 1О4, 30.01.2020.

1. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотон низ реалних бројева такав да је $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_{n+1}-x_n)=x\in\mathbb{R}$.

   (а) Доказати да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен.

   (б) Доказати да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан и наћи његову граничну вредност.

   (в) Доказати да део под (б) важи и без претпоставке о монотоности низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (а) Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилна функција и нека је $x_0\in\mathbb{R}$. Претпоставимо да је $f(x_0)=0$ и $f'(x)>f(x)$ за $x\in[x_0,+\infty)$. Доказати да је $f(x)>0$ за $x>x_0$.

   (б) Доказати да једначина $e^{x-1}=1+x+\frac{x^2}{2}$ има јединствено решење.

3. Нека су $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ непрекидне функције за које важи

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$

   Доказати да постоји $t\in[0,1]$ такво да је

$$(f(t))^{2020}+\sin\left((g(t))^{2020}\right)=(g(t))^{2020}+\sin\left((f(t))^{2020}\right).$$

4. Нека је $B=\{\log(n)-2k\pi \mid n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}_0\}$.

   (а) Показати да је скуп B затворен у односу на операцију $+$.

   (б) Показати да за свако $\varepsilon>0$ постоје $n\in\mathbb{N}$ и $k\in\mathbb{N}_0$ такви да важи $\log(n)-2k\pi\in(0,\varepsilon)$.

   (в) Одредити $\inf B_+^*$, где је $B_+^*=\{b\in B\mid b>0\}$.

   (г) Показати да је скуп B густ у $[0,+\infty)$.

   (д) Показати да је скуп $\{\sin(\ln n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ свуда густ у скупу $[-1,1]$.