Писмени испит из Анализе 1, 1О1 и 1О4, 29.09.2020.

1. (а) Дат је низ $a_n = \frac{1}{4\sqrt{n}+1}$ и пресликавање $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задато са

$$k(n) = \begin{cases} n+1, & \text{за } 3 \nmid n, \\ n-2, & \text{за } 3 \mid n. \end{cases}$$

Доказати да је k бијекција, наћи $\lim_{n\to\infty} a_n$ и $\lim_{n\to\infty} a_{k(n)}$.

(б) Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ такав да је $\lim_{n\to\infty} = a \in \mathbb{R}$ и $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ једна фиксирана бијекција. Доказати да низ $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира и $\lim_{n\to\infty} a_{k(n)} = a$.

(в) Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ и нека је A скуп његових тачака нагомилавања. Нека је $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ једна фиксирана инјекција и B скуп тачака нагомилавања низа $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Доказати да је $B \subset A$. Да ли мора да важи $B = A$?

2. (а) Формулисати и доказати Лагранжову теорему о средњој вредности.

(б) 1) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилна функција и $a \in \mathbb{R}$ такво да важи $f'(a) > 0$. Доказати да постоји $\varepsilon > 0$ такво да је f строго растућа на $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

2) Доказати да за $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ из дела б1) важи да је $f((a-\varepsilon, a+\varepsilon))$ отворен интервал.

3. (а) Формулисати теорему о смени променљиве у одређеном интегралу за Риман интеграбилну функцију.

(б) Израчунати интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

4. (а) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+2n+5}{2n^3+7}}.$$

(б) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+2n+5}{2n^3+7}} \cdot \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$