Писмени испит из Анализе 1, 1О1 и 1О4, 30.09.2020.

1. Нека је дат реалан низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и функција $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ таква да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $f(n) = a_n$, при чему је за свако $n \in \mathbb{N}$ функција f линеарна на сегменту $[n, n+1]$.
   (а) Ако је f ограничена, доказати да низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.
   (б) Ако важи $-xe^{-x} \leqslant f(x) \leqslant (x^2 + 3x + 7)e^{-x}$, за свако $x \in [1, +\infty]$, доказати да низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира.
   (в) Ако постоји $\lim_{n\to+\infty} a_n$, доказати да постоји и $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. (а) Формулисати Дарбуову теорему.
   (б) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција таква да је $f(2) = 0$, $f(3) = 3$ и $f(4) = 2$. Доказати да постоје тачке $c_1, c_2, c_3 \in (2, 4)$ такве да је $f'(c_1) = 3$, $f'(c_2) = -1$ и $f'(c_3) = \frac{1}{2}$.

3. Израчунати интеграл
$$\int_0^{5\ln 3} e^{-\frac{6}{5}x} \cdot \sqrt{1 + \sqrt[5]{e^{4x}}}\, dx.$$

4. (а) Навести дефиницију полупречника конвергенције степеног реда. Шта све може бити скуп тачака у којима степени ред облика $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ конвергира?
   (б) Одредити скуп тачака у којима степени ред
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n (1-2x)^n$$
   конвергира.