

Писмени испит из Анализе 1, 101 и 104, 26.09.2020.

1. а) Дати дефиницију конвергентног низа, подниза и тачке нагомилавања низа.
б) 1) Уколико поднизови $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ и $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергирају ка неком броју $a \in \mathbb{R}$, доказати да и $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира ка a .
2) Ако су поднизови $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ и $(a_{5k})_{k \in \mathbb{N}}$ низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентни, доказати да је и низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан.
2. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилна функција таква да је $\inf\{f'(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = A > 0$.
- а) Доказати да за свако $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$|f(y) - f(x)| \geq A|y - x|.$$

- б) Доказати да постоји решење једначине $f(x) = 0$.
в) Доказати да је решење једначине $f(x) = 0$ јединствено.
3. а) Формулисати и доказати Њутн-Лајбницева формулу.
б) Израчунати интеграл

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \left(\log x + \sqrt{\log^2 x + 3} \right)^2}.$$

4. а) У зависности од $p \in \mathbb{R}$, наћи

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cos(px)}{x^2}.$$

- б) У зависности од $\alpha \in \mathbb{R}$, испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n \log(3n))^{\alpha} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{2}{n}\right) \right).$$