Писмени испит из Анализе 1, 1О1 и 1О4, 12.09.2020.

1. За низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кажемо да задовољава услов (У) ако постоји низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такав да важи

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \implies |a_n - b_m| < \epsilon).$$

   (а) Дати дефиницију Кошијевог низа. Да ли сваки Кошијев низ у $\mathbb{R}$ конвергира?

   (б) Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ који задовољава услов (У) и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ који се у том случају јавља у формулацији услова (У). Доказати да уколико низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира, онда конвергира и низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и то ка истој граничној вредности.

   (в) Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ дат са $a_n = n$. Доказати да $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не задовољава услов (У).

2. (а) Формулисати и доказати Борел-Лебегову лему.

   (б) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ постоји $\epsilon_x > 0$ такво да је извод f' дате функције ограничен на интервалу $(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x)$.

      1) Доказати да је извод f' ограничен на произвољном сегменту $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

      2) Доказати да је функција f равномерно непрекидна на сваком сегменту $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Да ли f мора бити равномерно непрекидна на читавом $\mathbb{R}$?

3. (а) Доказати да важи $\ln\left(x + \frac{1}{x}\right) > 0$, за свако $x > 0$ и испитати конвергенцију интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\ln\left(x + \frac{1}{x}\right)}.$$

   (б) Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{e^x - 1}\right)}{\ln\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx.$$

4. (а) Формулисати Дирихлеов критеријум конвергенције редова.

   (б) 1) Доказати да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n + e)$ има ограничене парцијалне суме.

      2) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} \frac{(n+1)!}{(2n)!!} \sin(n + e).$$