Писмени испит из Анализе 1, 1О4, 23.09.2021.

1. (а) Дефинисати појмове конвергентног низа, подниза низа и тачке нагомилавања низа.

   (б) Нека је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дат са

$$a_n = n^3\left(e^{\sin\frac{1}{n}} - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1-\frac{4}{n}} - 2\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)\right).$$

   (1) Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   (2) Одредити скуп свих тачака нагомилавања низа $(a_n^2+b_n)\cos\frac{2n\pi}{3} + (-1)^{n+1}\operatorname{arctg}(a_{2n+1})$, где је низ $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дат са

$$b_n = \inf\left\{\arcsin\left((-1)^n\frac{n}{m}\right) : m \geq 2n, m\in\mathbb{N}\right\}.$$

2. Нека је $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln x - 1}{\ln x - 2}}$.

   (а) Одредити домен и асимптоте функције $f(x)$.

   (б) Наћи једначину тангенте на график функције $f(x)$ у тачки $\big(e^3, f(e^3)\big)$.

   (в) У зависности од реалног параметра α, наћи број решења једначине $f(x) = \alpha$.

3. (а) (1) Дефинисати појам примитивне функције.

   (2) Формулисати и доказати тврђење о јединствености примитивне функције.

   (3) Дефинисати појам неодређеног интеграла.

   (б) Нека је $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln x - 1}{\ln x - 2}}$. Израчунати $\displaystyle\int \frac{f(x)}{x}\,dx$.

4. Испитати за које $x\in\mathbb{R}$ следећи ред конвергира:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\pi)^n + e^{n+1}}{2n-1}(x-2)^n.$$