Писмени испит из Анализе 1, 1О4, 07.09.2021.

1. Посматрајмо скуп $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ на коме дефинишемо операцију као

$$(x, m) * (y, n) = (x + y, m + n), \ \forall (x, m), (y, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},$$

и релацију као

$$(x, m) \preccurlyeq (y, n) \iff \big((x < y) \vee (x = y \wedge m^3 \leqslant n^3)\big)\,, \ \forall (x, m), (y, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}.$$

   (а) Показати да је $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \preccurlyeq)$ тотално уређен скуп.

   (б) Одредити супремум скупа $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \mid |x| + |y| \leqslant 4\}$, ако постоји.

2. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right), & x < -1, \\ b, & x = -1, \\ \frac{\log(x+2)}{x+1} + c, & x > -1. \end{cases}$$

   (а) Одредити све реалне константе a, b и c за које је функција f непрекидна.

   (б) Да ли постоје реалне константе a, b и c за које је функција f диференцијабилна?

3. Нека је дат низ интеграла $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ са

$$I_n = \frac{1}{n!} \int\limits_0^{2021} (2021 - x)^n e^x \, dx.$$

   (а) Наћи везу између I_n и I_{n+1}.

   (б) Дефинисати појам конвергентног низа. Формулисати и доказати теорему о конвергенцији монотоних низова.

   (в) Доказати да низ I_n конвергира.

   (г) Наћи $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

4. (а) Формулисати и доказати Даламберов став о редовима са позитивним члановима.

   (б) Нека је дат низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где је $a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(1+(n+1)^2)}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $a_1 = 1$. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3 a_n$.