Писмени испит из Анализе 1, 1О4, 26.08.2021.

1. За свако $n \in \mathbb{N}$ посматрајмо скуп

$$A_n = \left\{ \left(1+\frac{1}{2m}\right)^{\frac{m}{8+3n}} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, m \geqslant n \right\} \bigcup \left\{ \left(1+\frac{1}{m^2+2m}\right)^{\frac{(m+1)^2n^2}{(4n+1)^2}} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, m \geqslant n \right\}.$$

   (а) Наћи $a_n = \sup A_n$.

   (б) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. (1) Дефинисати Тејлоров полином функције. Формулисати и доказати Тејлорову формулу са остатком у Пеановом облику.

   (2) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција таква да је

$$f'(x) = \cos(\pi(x+1)^2) - \cos(\pi(x-1)^2) \text{ и } f(0) = 0.$$

   (а) Наћи константе a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 тако да важи

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^5),\ x \to 0.$$

   (б) Наћи најмање $n \in \mathbb{N}$ тако да постоји коначан ненула лимес $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n}$.

   (в) Доказати да је $x = 0$ тачка локалног минимума функције f. Да ли је $x = 1$ тачка локалног екстремума функције f?

3. Израчунати $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt[4]{(4-x^4)^3}}\,\mathrm{d}x$.

4. (1) Чему је једнак полупречник конвергенције R степеног реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, где $c_n, z \in \mathbb{C}$? Дефинисати појам апсолутне конвергенције реда и показати да наведени степени ред апсолутно конвергира у тачкама $z \in \mathbb{C}$ за које важи $|z| < R$.

   (2) Дата је функција $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

   (а) Одредити домен и слику домена при пресликавању f. Показати да $f(x)$ има инверзну функцију $g(x)$ и потом је одредити.

   (б) Развити $g(x)$ у степени ред у околини нуле и одредити где важи тај развој.