

Други колоквијум из Анализе 1, 1О4, 31.05.2021.

1. (а) Формулисати Ролову теорему.
- (б) Нека су $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције такве да важи $s(0) = s(\pi) = 0$ и $c(0) = 1$ и за свако $x \in \mathbb{R}$ је испуњено $s'(x) = c(x)$ и $c'(x) = -s(x)$.
 - (1) Нека су $x_1 < x_2$ нуле функције s такве да у интервалу (x_1, x_2) функција s нема више ниједну нулу. Доказати да постоји тачно једна нула функције c у интервалу (x_1, x_2) .
 - (2) Нека је $a \in \mathbb{R}$. Доказати да израз $s(x)c(a-x) + c(x)s(a-x)$ не зависи од x и да је једнак $s(a)$.
 - (3) Доказати да функције s и c имају бесконачно много нула на \mathbb{R} .

2. (а) Формулисати и доказати поредбени критеријум за конвергенцију редова.

- (б) (1) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}).$$

- (2) Наћи константе $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тако да следећи ред конвергира:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n} + \alpha \sqrt[3]{n-1} + \beta \sqrt[3]{n+2}).$$

3. У зависности од параметра $a > \frac{1}{4}$ израчунати

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}.$$

4. (а) Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_0^{10} \frac{(-1)^{[x]}}{x^3} dx.$$

- (б) Испитати условну и апсолутну конвергенцију интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{\sqrt{x}} dx.$$