Колоквијум из Анализе 1, 1О4, 08.02.2021.

1. Посматрајмо скуп $\mathbb{R}^2$ на коме дефинишемо операцију као

$$(u,v) \oplus (x,y) = (u+x, v+y),\ \forall (u,v),(x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

и релацију као

$$(u,v) \preccurlyeq (x,y) \Longleftrightarrow ((v<y) \vee (v=y \wedge u \leqslant x)),\ \forall (u,v),(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(а) Доказати да је структура $(\mathbb{R}^2, \oplus, \preccurlyeq)$ тотално уређена Абелова група.

(б) Доказати да у $(\mathbb{R}^2, \oplus, \preccurlyeq)$ не важи Архимедова аксиома.

(в) Дат је скуп $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Наћи $\sup T$, ако постоји.

(г) Доказати да структура $(\mathbb{R}^2, \oplus, \preccurlyeq)$ није изоморфна структури $(\mathbb{N}, +, \leqslant)$ (са стандардним сабирањем и релацијом поретка).
Напомена: Кажемо да су структуре изоморфне ако између њих постоји пресликавање које је бијекција и морфизам структура.

2. (а) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{[n\sqrt{2}]}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}}$. Уверити се да на овим примерима важи тврђење из дела под (в).

(б) Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ за који важи $(\exists c>0)(\forall m,n \in \mathbb{N})|a_m - a_n| > c$. Доказати да низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није конвергентан (у $\mathbb{R}$).

(в) Нека је $\alpha > 0$ ирационалан и нека су $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низови природних бројева такви да важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$.

3. Дата је сурјективна и непрекидна функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за коју важи да је за свако $y \in \mathbb{R}$ скуп $f^{-1}(\{y\})$ највише двочлан.

(а) Показати да за све $a,b \in \mathbb{R}$, такве да $a<b$, функција $f|_{[a,b]}$ достиже минимум и максимум баш у тачкама a и b.

(б) Показати да је функција f строго монотона.

4. Нека је функција f дата са $f(x) = |x-1| + \operatorname{sgn}(x^2 - x - 2)$.

(а) Испитати диференцијабилност функције f.

(б) Испитати равномерну непрекидност функције g, дате са $g(x) = xf(x)$, на интервалима $[1,3]$, $[0,1]$ и $(-\infty,-3)$.