

Писмени испит из Анализе 1, 1О4, 30.06.2021.

- Посматрајмо скуп $D = \{\frac{2m}{3^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
 - Дефинисати пребројив скуп. Доказати да је скуп D пребројив.
 - Дефинисати горње и доње ограничење скупа, супремум и инфимум скупа. Наћи $\inf D_+$, где је $D_+ = \{d \in D \mid d > 0\}$.
 - Доказати да се између свака два реална броја налази бар један број из скупа D .
 - Доказати да је скуп $F = \{x^2 \mid x \in D\}$ свуда густ подскуп од $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
- Нека су $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функције које су непрекидне на $[a, b]$ и диференцијабилне на (a, b) . Претпоставимо да су f' и g' непрекидне, позитивне и растуће функције на (a, b) . Доказати да постоји $c \in (a, b)$ тако да је

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = f'(c)g'(c).$$

- Формулисати и доказати основну теорему интегралног рачуна.

- Израчунати интеграл $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} \arccos x}{2-x^2} dx$.

- У зависности од $\alpha \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)^\alpha - \left(n + \frac{1}{n}\right)^\alpha \right)$.

Писмени испит из Анализе 1, 1О4, 30.06.2021.

- Посматрајмо скуп $D = \{\frac{2m}{3^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
 - Дефинисати пребројив скуп. Доказати да је скуп D пребројив.
 - Дефинисати горње и доње ограничење скупа, супремум и инфимум скупа. Наћи $\inf D_+$, где је $D_+ = \{d \in D \mid d > 0\}$.
 - Доказати да се између свака два реална броја налази бар један број из скупа D .
 - Доказати да је скуп $F = \{x^2 \mid x \in D\}$ свуда густ подскуп од $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
- Нека су $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функције које су непрекидне на $[a, b]$ и диференцијабилне на (a, b) . Претпоставимо да су f' и g' непрекидне, позитивне и растуће функције на (a, b) . Доказати да постоји $c \in (a, b)$ тако да је

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = f'(c)g'(c).$$

- Формулисати и доказати основну теорему интегралног рачуна.

- Израчунати интеграл $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} \arccos x}{2-x^2} dx$.

- У зависности од $\alpha \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)^\alpha - \left(n + \frac{1}{n}\right)^\alpha \right)$.