Писмени испит из Анализе 1, 1О4, 12.06.2021.

1. а) Дефинисати појам граничне вредности функције у тачки, појам непрекидне функције у тачки и појам извода функције у тачки.

   б) Нека је дата функција $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ са $f(x) = \sqrt[3]{x^5} \sin \frac{\pi}{x} + |x^2 + 2x|$. Одредити $a \in \mathbb{R}$ тако да функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дата са

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

   буде непрекидна.

   в) Испитати диференцијабилност функције g.

2. а) Формулисати и доказати Теорему о међувредности.

   б) Доказати да је

$$2 \sin x - 3x + \operatorname{tg} x > 0$$

   за све $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

   в) Нека је дата функција $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ са

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x - x}.$$

   Доказати да је $f(x) > 2$ за све $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

   г) Наћи $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

3. Нека је дат низ интеграла

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x| \sin nx}{(1 + 2^x) \sin x} \, dx, \ n \geqslant 1.$$

   а) Доказати да је $I_n = \int\limits_0^\pi \frac{x \sin nx}{\sin x} \, dx$.

   б) Наћи I_1 и I_2.

   г) Одредити број тачака нагомилавања низа $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (упутство: наћи везу између I_n и I_{n-2}).

   д) Доказати да постоји реалан број A такав да ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |A - I_n| \sin \frac{(n+1)\pi}{2}$$

   конвергира.

4. Испитати за које $x \in \mathbb{R}$ следећи ред конвергира:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) (3x+1)^n.$$