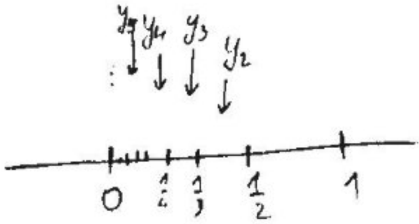
① ПТС $\{n\in\mathbb{N} \mid f(\frac{1}{n})\neq 0\}$ ограничен $\Rightarrow (\exists N)(\forall n\geq N)\, f(\frac{1}{n})=0$ (јер је бесконачан)



По Ролу, $(\forall n\geq N)\left(\exists y_n\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\right) f'(y_n)=0$

$\frac{1}{n+1}\leq y_n\leq\frac{1}{n} \Rightarrow y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

f је C^1 $\Rightarrow$ f' непрекидна $\Rightarrow f'(0)=f'(\lim y_n)=\lim f'(y_n)=\lim 0=0.$

Знамо да $f''(0)$ постоји $\Rightarrow \exists \lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(h)}{h}$

По Хајнеу, можемо посматрати у лимесу само низ $y_n\to 0$.

$$\Rightarrow f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{h}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{f'(y_n)}^{=0}}{y_n}=\lim_{n\to\infty}0=0. \ ↯$$

② а) Скрипта: дефиниција 22 (стр. 51) и дефиниција 1 (страна 171).

б1) $\alpha\in A' \Rightarrow (\forall\varepsilon>0)$ имамо бесконачно елемената <u>скупа A</u> у $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$

(*) скуп има различите елементе $\Rightarrow (\forall\varepsilon>0)$ —||— <u>низа (x_n)</u> у $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$

$\Rightarrow \exists$ подниз који конвергира ка $\alpha \Rightarrow \alpha\in T$

б2) $T\subseteq A'$?

$\alpha\in T \Rightarrow \exists$ подниз који конвергира ка α

$\Rightarrow (\forall\varepsilon>0)$ имамо бесконачно чланова низа (x_n) у $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$

⌈Они можда могу да се понављају, али зато имамо услов $|\{n\in\mathbb{N}\mid x_n=a\}|<\infty\ \forall a$, који каже да се сваки члан низа понавља само коначно много пута. То значи да и даље остаје бесконачно много различитих.⌋

из услова $\Rightarrow (\forall\varepsilon>0)$ —||— скупа A у $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon) \Rightarrow \alpha\in A'$

в) За низ (x_n) скуп A је $A=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}=\left\{\frac{1}{m+n}\mid n,m\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

и његова једина тачка нагомилавања је $A'=\{0\}$.

$$|\{n\in\mathbb{N}\mid x_n=a\}|=\begin{cases}k-1, & \text{за } a=\frac{1}{k} \text{ за неко } k\in\mathbb{N}\\ 0, & \text{иначе}\end{cases} \Rightarrow \text{коначан} \xRightarrow{б2} T=A'=\{0\}.$$

3. Задатак

Израчунати $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\,dx = I$

Решење:

Тачке $x=0$ и $x=1$ су сингуларитети, с обзиром да подинтегрална ф-ја није дефинисана у тим тачкама.

Проверимо да ли интеграл конвергира.

Посматрајмо $I = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} \sim \frac{1}{x^{2/3}}, \quad x \to 0^+$$

Интеграли $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$ и $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{2/3}}dx$ су еквиконвергентни, па је тада и $\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$ конвергентан.

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx = \left[\begin{array}{l} t = 1-x \\ dt = -dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1/2 & 1 \\ \hline t & 1/2 & 0 \end{array}\end{array}\right] = \int_{1/2}^0 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t\cdot(1-t)^2}} = \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt[3]{t(1-t)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{t(1-t)^2}} \sim \frac{1}{t^{1/3}}, \quad t \to 0^+$$

Тада, аналогно претходном разматрању интеграл $\int_0^{1/2}\frac{dt}{\sqrt[3]{t(1-t)^2}}$ конвергира, а самим тим и $\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$.

Дакле, интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$ конвергира, и можемо га израчунати.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx = \left[\begin{array}{lll} & \text{Чебишевљев интеграл} & \\ \text{смена:} & (x^{-1}-1) = t^3 & -\frac{1}{x^2}dx = 3t^2dt \\ & t^3 = \frac{1}{x} - 1 & dx = -3x^2t^2dt \\ & x = \frac{1}{t^3+1} & \end{array}\right]$$

$x \to 0^+$, $t \to +\infty$

$x \to 1^-$, $t \to 0$

$$= -3\int_{+\infty}^0 \frac{t}{t^3+1}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{3t}{t^3+1}\,dt$$

Даље, $\frac{t}{\underbrace{(t+1)(t^2-t+1)}_{t^3+1}} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \\ C = \frac{1}{3} \end{array}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{3t}{t^3+1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{-dt}{t+1} + \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{-dt}{t+1} + \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(-\ln|t+1| \Big|_0^M\right) + \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\,dt =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(-\ln(M+1)+\ln 1\right) + \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\int_0^M \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt + \frac{3}{2}\int_0^M \frac{1}{t^2-t+1}\,dt\right) =$$

$$= -\lim_{M\to+\infty} \ln(M+1) + \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot \ln|t^2-t+1| \Big|_0^M + \frac{3}{2}\int_0^M \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt\right) =$$

$$= -\lim_{M\to+\infty} \ln(M+1) + \lim_{M\to+\infty}\left(\ln\sqrt{M^2-M+1} + \frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\int_0^M \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\,dt =\right.$$

$$= -\lim_{M\to+\infty} \ln(M+1) + \lim_{M\to+\infty} \ln\left(\sqrt{M^2-M+1}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{2}\lim_{M\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{M^2-M+1}\right)}{\ln(M+1)} + \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\lim_{M\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{2M-1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

4. Задатак

а) Пронаћи у скрипти

б) Испитајмо конвергенцију реда $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}{n^a}$

Апсолутна конвергенција:

Да би ред апсолутно конвергирао, тада $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}{n^a}\right|$ конвергира.

Посматрамо $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}{n^a}$

$$\frac{1}{\sqrt{\ln n}} \to 0, \quad n \to +\infty$$

$$\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)^2}{2} + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)^2\right), \quad n \to +\infty$$

$$\sin\left(1-\left(1-\frac{1}{2\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{2\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right) = \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right) \to 0, \quad n \to +\infty$$

$$\sin\left(\frac{1}{2\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) = \frac{1}{2\ln n} + o\left(\frac{1}{2\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) = \frac{1}{2\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad n \to +\infty$$

$$\frac{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}{n^a} \sim \frac{1}{2n^a \ln n}, \quad n \to +\infty$$

Како ред $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n^a \ln n}$ конвергира за $a>1$, а еквиконвергентан је са редом $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}{n^a}$, тада и он конвергира за $a>1$.

Дакле, ред конвергира апсолутно за $a>1$, а самим тим и обично. Дивергира апсолутно за $a \leq 1$.

За $a<0$:

$$a_n = \frac{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}{n^a} = \sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)\cdot n^{|a|}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)\cdot n^{|a|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)\cdot n^{|a|} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\ln n}\cdot n^{|a|}\cdot(1+o(1))$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{|a|}}{2\ln n} \overset{\text{Л.П.}}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{|a|\cdot n^{|a|-1}}{2\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot|a|\cdot n^{|a|} \to +\infty$$

Тада $(-1)^n\cdot\frac{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}{n^a} \not\to 0$ за $a<0$, па ред дивергира.

Испитајмо обичну конвергенцију за $a\geq 0$.

За $a=0$: $(-1)^n\cdot\frac{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}{n^a} = (-1)^n\cdot\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)\sim$

$\sim (-1)^n\cdot\frac{1}{2\ln n}$, $n\to+\infty$

Ред $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2\ln n}$ конвергира по Лајбницу (испитати све услове!)

Па тада и почетни ред конвергира за $a=0$.

За $a>0$: Користимо Абела: $\sum_{n=2}^{+\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^a}}_{a_n}\cdot\underbrace{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}_{b_n}$

За $a>0$: $a_n=\frac{(-1)^n}{n^a}$ ред $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^a}$ конвергира по Лајбницу

Низ $b_n=\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$ је монотон и ограничен (испитати!)

Тада према Абелу ред $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}{n^a}$ конвергира обично за $a>0$.

Дакле,

За: $a<0$ ред дивергира

$a\in[0,1]$ ред условно конвергира

$a>1$ ред апсолутно конвергира