Писмени испит из Анализе 1
1О1 и 1О4, 3.7.2020.

1. Нека је $f\colon (-1,2) \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција и нека је $f''(0) \neq 0$. Доказати да је скуп $\{n \in \mathbb{N} \mid f(1/n) \neq 0\}$ неограничен.

2. а) Формулисати дефиниције тачке нагомилавања низа и тачке нагомилавања скупа у $\mathbb{R}$.

   б) Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен низ и $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Означимо са T скуп тачака нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, а са A' скуп тачака нагомилавања скупа A.

      1) Доказати да $A' \subseteq T$.
      2) Претпоставимо да је за свако $a \in A$ скуп $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = a\}$ коначан. Доказати да је тада $A' = T$.

   в) Нека је $b\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ функција дата са $b(m,n) = \frac{1}{m+n}$ и нека је $k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ произвољна фиксирана бијекција.
   Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ одређен са $x_n = b(k(n))$. Одредити скуп тачака нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Израчунати интеграл
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx.$$

4. а) Доказати да сваки апсолутно конвергентан ред конвергира. Да ли важи обрнуто?

   б) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)}{n^a}$$
   у зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$.